УДК 532.516/539.3

ПРОБЛЕМА ТЫСЯЧЕЛЕТИЯ (MILLENNIUM PRIZE PROBLEM) ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА РАЗРЕШИМА КЛАССИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Козачок А.А., ***Киев, Украина***

1.Общие сведения

Сформулированная в 2000-м г. математическим институтом Клея (Clay Mathematics Institute) шестая проблема тысячелетия (Millennium Problems) о существовании и гладкости решений уравнений Навье – Стокса для несжимаемой вязкой жидкости активизировала попытки многих математиков внести свой вклад в ее разрешение. Проблема периодически активно обсуждалась на многочисленных научных и даже на обычных популярных форумах (см., например, ссылки на странице http://grani.ru/Society/Science/m.112524.html). Особенно активным было обсуждение попытки Пенелопы Смит (Penelope Smith) решить эту проблему. В любой поисковой системе Интернета поиск по ключевым словам Millennium Prize Problem, Penny Smith укажет на сотни адресов. По признанию некоторых комментаторов проблема настолько сложна, что полное изложение ее решения может потребовать до тысячи страниц для математических формул (см., например, http://lib.mexmat.ru/forum/viewtopic.php?t=4289). Возможно, так оно и получится, если не вникать в особенности вывода и в физический смысл входящих в уравнения искомых величин, а уравнения Навье – Стокса рассматривать «как они есть», т.е. всего лишь как сочетание связанных между собой функций неизвестного происхождения. При таком подходе наиболее простые решения, как правило, почему-то ускользают из поля зрения. Не случайно в некоторых опубликованных исследованиях по этому поводу используется специфический и самый современный математический аппарат, малоизвестный даже профессиональным математикам. И то, что автор официального описания проблемы тысячелетия (Official Problem Description – Charles Fefferman) поставил задачу доказательства всего лишь существования и гладкости решения, а не получение его самого, свидетельствует о предполагаемой необычайной сложности разыскания аналитического решения. Поэтому вытекающее из названия предлагаемой работы утверждение автора о том, что проблема вполне разрешима (в объеме практических потребностей) традиционными классическими методами, вероятно, не может быть сразу воспринято всерьез осведомленными математиками. Но, тем не менее, автор настаивает на таком утверждении и попытается подкрепить его аргументами, основанными исключительно на убедительных аналогиях, на классическом математическом аппарате и требующими для изложения математических выкладок немного страниц. Оказывается, уравнения Навье–Стокса для несжимаемой жидкости можно корректно свести к более простым и хорошо изученным классическим уравнениям математической физики, проблема доказательства существования решений которых уже не актуальна и обычно не возникает. И если это действительно так, то прежние зачастую виртуозные математические построения по этому поводу могут представлять сугубо теоретический интерес для узкого круга профессионалов лишь как шедевры изощренного мастерства по отысканию решений, причем отысканию наиболее трудным способом, при искусственном ограничении количества исходной информации об исследуемых уравнениях.

2. Об одной незамеченной предшественниками аналогии

Во многих университетских курсах механики сплошных сред [1, стр. 107], гидромеханики [2, стр. 73], теории упругости [3, стр. 59], высшей математики [4, стр. 329] различными методами строятся доказательства достаточно строгой записи выражений для бесконечно малой величины $\varepsilon_o = \mathrm{div}\vec{u}$ и скорости $\dot{\varepsilon}_o = \mathrm{div}\dot{\vec{u}}$ объемной деформации. Не прибегая к анализу строгости этих доказательств, мы лишь особо отметим их аналогию, которая наталкивает на еще одну очевидную аналогию, почему-то ускользнувшую из поля зрения предшественников. И действительно, если $\mathrm{div}\vec{u}$ и $\mathrm{div}\dot{\vec{u}}$ соответствуют величине и скорости относительного изменения элементарного объема δV, то выражение $\ddot{\varepsilon}_o = \mathrm{div}\ddot{\vec{u}}$, вероятно, есть не что иное, как ускорение относительного изменения того же объема δV.

Для наглядности дальнейших выкладок запишем по аналогии все вместе упомянутые выше соотношения

$$\varepsilon_o = \frac{1}{\delta V} d(\delta V) = \mathrm{div}\vec{u},\ \dot{\varepsilon}_o = \frac{1}{\delta V}\frac{d(\delta V)}{dt} = \mathrm{div}\dot{\vec{u}},\ \ddot{\varepsilon}_o = \frac{1}{\delta V}\frac{d^2(\delta V)}{dt^2} = \mathrm{div}\ddot{\vec{u}} \qquad (1)$$

и уточним определение входящих в них величин: компонент бесконечно малого перемещения $u_i = x_i - x_{i0}$, скорости $\dot{u}_i = du_i/dt = dx_i/dt$, ускорения $\ddot{u}_i = d\dot{u}_i/dt = d^2u_i/dt^2 = d^2x_i/dt^2$, а также выражение для оператора дивергенции $\mathrm{div} \leftrightarrow \partial/\partial x + \partial/\partial y + \partial/\partial z$.

Несмотря на очевидность записи по аналогии выражения $\ddot{\varepsilon}_o = \mathrm{div}\ddot{\vec{u}}$, мы, ввиду особой важности, все же попытаемся выполнить, по возможности, его строгое доказательство. Поэтому с целью максимальной прозрачности дальнейших математических преобразований запишем выражения для компонент ускорений в общеизвестной [1, стр. 39] развернутой форме

$$\ddot{u}_x = \frac{d\dot{u}_x}{dt} = \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial t} + \dot{u}_x \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} + \dot{u}_y \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial y} + \dot{u}_z \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial z},$$
$$\ddot{u}_y = \frac{d\dot{u}_y}{dt} = \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial t} + \dot{u}_x \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x} + \dot{u}_y \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y} + \dot{u}_z \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial z},$$
$$\ddot{u}_z = \frac{d\dot{u}_z}{dt} = \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial t} + \dot{u}_x \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial x} + \dot{u}_y \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial y} + \dot{u}_z \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z}. \qquad (2)$$

Вычислим частную производную от каждого из этих выражений по соответствующей координате $x_i = x, y, z$ и сложим полученные выражения (операция div). Затем сгруппируем, как показано ниже, имеющиеся члены

$$\mathrm{div}\ddot{\vec{u}} = \frac{\partial \ddot{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \ddot{u}_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\dot{\vec{u}} + \dot{u}_x \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{div}\dot{\vec{u}} + \dot{u}_y \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{div}\dot{\vec{u}} + \dot{u}_z \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{div}\dot{\vec{u}} +$$
$$+\left[\left(\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial y}\frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial z}\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial z}\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial x}\right)\right]. \qquad (3)$$

А теперь еще раз запишем выражение для $\ddot{\varepsilon}_o$ и выполним элементарные преобразования с учетом второй формулы (1)

$$\ddot{\varepsilon}_o = \frac{1}{\delta V}\frac{d^2(\delta V)}{dt^2} = \frac{1}{\delta V}\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta V}{\delta V}\frac{d(\delta V)}{dt}\right) = \frac{1}{\delta V}\frac{d}{dt}\left(\delta V div\dot{\vec{u}}\right).$$

После дифференцирования выражения в скобках эта формула принимает вид, пока лишь частично совпадающий с (3)

$$\ddot{\varepsilon}_o = \frac{d}{dt}div\dot{\vec{u}} + div\dot{\vec{u}}\frac{d(\delta V)}{\delta V dt} = \frac{d}{dt}div\dot{\vec{u}} + (div\dot{\vec{u}})^2. \qquad (4)$$

Для полного совпадения (3) и (4) требуется доказать, что выражение в квадратных скобках (3) соответствует $(div\dot{\vec{u}})^2$. С этой целью сначала предположим, а потом покажем, что наряду с общеизвестными и совершенно очевидными соотношениями для полных производных компонент скорости

$$\frac{d\dot{u}_i}{dx_j} = \frac{d\dot{u}_i}{dx_i}\frac{dx_i}{dx_j} \qquad (5)$$

можно записать аналогичные по внешнему виду соотношения и для частных производных

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x_j}. \qquad (6)$$

Геометрическая интерпретация этих соотношений может быть сформулирована так: для вектора скорости (как и для любого вектора) существуют такие плоские кривые, т.е. графические зависимости между каждой парой пространственных координат $x_i(x_j)$, в каждой точке которых соблюдаются взаимосвязи между частными производными вектора в виде (6). Зависимости $x_i(x_j)$ могут быть найдены после решения фактически обыкновенного дифференциального уравнения при фиксированной третьей координате x_k и времени t (для (5) x_k и t не фиксированы)

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \dot{u}_i / \partial x_j}{\partial \dot{u}_i / \partial x_i}, \quad (i = 1,2,3).$$

Разумеется, решение такого уравнения может быть найдено, если заданы выражения для компонент скорости или их частные производные по пространственным координатам. Эта ситуация аналогична другой известной [1, стр. 43] ситуации, связанной с построением векторных линий (линий тока), когда в правой части этого дифференциального уравнения записывается отношение разноименных компонент скорости $\dot{u}_i / \dot{u}_j$.

Для обеспечения наглядности последующих преобразований предоставим развернутую запись формулы (6)

$$\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial y} = \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}, \quad \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x} = \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x},$$
$$\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial z} = \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}, \quad \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial x} = \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x},$$
$$\frac{\partial \dot{u}_y}{\partial z} = \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}, \quad \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial y} = \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}. \qquad (6,a)$$

Если принять во внимание, что произведение обратных производных $\left(\partial x_i / \partial x_j\right)\left(\partial x_j / \partial x_i\right) = 1$, то перемножение выражений в каждой строке (6,а) приведет к таким зависимостям:

$$\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial y}\frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x} = \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x}\frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial z}\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial x} = \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x}\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z}, \quad \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial z}\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial y} = \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y}\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z}. \tag{7}$$

В случае полных производных такие же по виду соотношения совершенно очевидны и могут быть записаны без доказательства, поскольку после взаимной перестановки дифференциалов dx_i и dx_i справа или слева они превращаются в тождества

$$\frac{d\dot{u}_i}{dx_j}\frac{d\dot{u}_j}{dx_i} = \frac{d\dot{u}_i}{dx_i}\frac{d\dot{u}_j}{dx_j}. \tag{7,а}$$

С учетом соотношений (7) выражение в квадратных скобках формулы (3) преобразуется в $\left(\mathrm{div}\dot{\vec{u}}\right)^2$, а (3) принимает вид, совпадающий с (4)

$$\mathrm{div}\ddot{\vec{u}} = \mathrm{div}\left(\frac{d\dot{\vec{u}}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\mathrm{div}\dot{\vec{u}} + \left(\mathrm{div}\dot{\vec{u}}\right)^2 \tag{8}$$

и подкрепляющий принятое выше предположение о том, что $\mathrm{div}\ddot{\vec{u}} = \ddot{\varepsilon}_{\text{о}}$.

3. Дополнительные обоснования полученных результатов

В приведенных выше преобразованиях обращает на себя внимание то, что добиться соответствия между результатами (7) и (3), т.е. подтвердить равенство $\ddot{\varepsilon}_{\text{о}} = \mathrm{div}\ddot{\vec{u}}$, можно только с помощью формул (6,а). Однако, при выводе аналогичных равенств $\varepsilon_{\text{о}} = \mathrm{div}\vec{u}$ и $\dot{\varepsilon}_{\text{о}} = \mathrm{div}\dot{\vec{u}}$ другими авторами [2, стр. 71; 4, стр. 329; 5, стр. 161 и др.], причем, принципиально различными методами, подобные формулы почему-то никогда не применялись. Не подвергая сомнению корректность преобразований, выполненных упомянутыми авторами, мы все же покажем, что при строгом и прозрачном математическом переходе от развернутых выражений для компонент скорости $\dot{u}_i$ к выражению $\dot{\varepsilon}_{\text{о}}$ согласно (1) применение формул вида (6,а) неизбежно. С целью проверить это утверждение, запишем выражения для компонент скорости в развернутом виде, исходя из записи полного дифференциала компонент перемещения

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}dt + \frac{\partial u_i}{\partial x}dx + \frac{\partial u_i}{\partial y}dy + \frac{\partial u_i}{\partial z}dz, \quad (i = x, y, z). \tag{9}$$

Деление на dt правой и левой частей этого выражения дает такие формулы для компонент скорости:

$$\begin{aligned}
\dot{u}_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \dot{u}_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \dot{u}_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \dot{u}_z \frac{\partial u_x}{\partial z},\\
\dot{u}_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + \dot{u}_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + \dot{u}_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \dot{u}_z \frac{\partial u_y}{\partial z},\\
\dot{u}_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + \dot{u}_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + \dot{u}_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + \dot{u}_z \frac{\partial u_z}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Эти очевидные формулы в известных автору учебных пособиях почему-то не рассматриваются. В научных же публикациях автор их обнаружил лишь в [6, стр. 33]. Из формул (10) следует, что компоненты скорости точно так же, как и компоненты ускорения (2), имеют и локальную $\partial u_i/\partial t$, и конвективную $\dot{u}\,\mathrm{grad}\,u_i$ составляющие. К тому же видно, что компоненты скорости в развернутом виде не могут быть сразу записаны в явной форме, поскольку выражения для каждой компоненты $\dot{u}_i$ содержат все составляющие. Это можно сделать только после решения алгебраической системы уравнений относительно трех неизвестных $\dot{u}_x, \dot{u}_y, \dot{u}_z$.

Соотношения также (10) свидетельствуют, что компоненты скорости $\dot{u}_i$ не могут задаваться произвольно, а только в соответствии с указанными формулами, поскольку это требование диктуется условием сохранения сплошности непрерывно деформируемой среды.

Дифференцируя каждое из соотношений (10) по x, y, z соответственно и складывая полученные результаты (операция $\mathrm{div}\dot{\vec{u}}$), после группирования членов получим

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\dot{\vec{u}} &= \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\vec{u} + \dot{u}_x \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{div}\vec{u} + \dot{u}_y \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{div}\vec{u} + \dot{u}_z \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{div}\vec{u} +\\
&+\left(\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y}\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z}\frac{\partial u_z}{\partial z} + \right.\\
&\left. + \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial y}\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial z}\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial z}\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial y}\frac{\partial u_y}{\partial z}\right).
\end{aligned} \tag{11}$$

А теперь еще раз запишем, но в другом виде, вторую формулу (1), имея в виду независимость от времени начального элементарного объема δV_0

$$\operatorname{div}\dot{\vec{u}} = \frac{1}{\delta V}\frac{d(\delta V)}{dt} = \frac{1}{\delta V}\frac{d(\delta V - \delta V_0)}{dt} = \frac{1}{\delta V}\frac{d\left(\delta V \dfrac{\delta V - \delta V_0}{\delta V}\right)}{dt}.$$

Выполнив дифференцирование произведения в скобках, имеем

$$\operatorname{div}\dot{\vec{u}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta V - \delta V_0}{\delta V}\right) + \frac{\delta V - \delta V_0}{\delta V}\frac{d(\delta V)}{\delta V dt}. \tag{12}$$

Выражение $(\delta V - \delta V_0)/\delta V$ можно рассматривать как относительное изменение элементарного объема за время dt, т.е. приравнять $\operatorname{div}\vec{u}$. В таком случае соотношение (12) необходимо переписать следующим образом:

$$\operatorname{div}\dot{\vec{u}} = \operatorname{div}\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\operatorname{div}\vec{u} + \operatorname{div}\dot{\vec{u}}\operatorname{div}\vec{u}. \tag{12,а}$$

В формулах (11) и (12,а) левые части совершенно одинаковы и первые четыре члена правой части (11) соответствуют первому члену правой части (12,а). Следовательно, правые части должны совпадать в целом. Оказывается, что такого совпадения (11) и (12,а) можно достичь, если по аналогии с (6,а) применить выражения для частных производных

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial y} = \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}, \\
\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial z} = \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}, \\
\frac{\partial \dot{u}_y}{\partial z} = \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}, \\
\frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x} = \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}, \\
\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial x} = \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}, \\
\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial y} = \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{\partial u_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}.
\end{gathered} \tag{6,б}$$

Перемножение каждой пары соотношений всех строк (6,б) дает результаты, аналогичные (7) и означающие допустимость перестановки операторов дифференцирования множителей в каждом произведении, а именно:

$$\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial y}\frac{\partial u_y}{\partial x}=\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial y},\quad \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial z}\frac{\partial u_z}{\partial x}=\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x}\frac{\partial u_z}{\partial z},\quad \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial z}\frac{\partial u_z}{\partial y}=\frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y}\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial y}=\frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y}\frac{\partial u_x}{\partial x},\quad \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial z}=\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z}\frac{\partial u_x}{\partial x},\quad \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial y}\frac{\partial u_y}{\partial z}=\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z}\frac{\partial u_y}{\partial y}. \qquad (13)$$

С учетом (13) выражение $\operatorname{div}\dot{\vec{u}}$ согласно формул (11) можно преобразовать к такому виду:

$$\operatorname{div}\dot{\vec{u}}=\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{u}+\dot{u}_x\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\vec{u}+\dot{u}_y\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{div}\vec{u}+\dot{u}_z\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{div}\vec{u}+\operatorname{div}\dot{\vec{u}}\operatorname{div}\vec{u}. \qquad (14)$$

Первые четыре члена правой части (14) представляют собой развернутую запись полной производной по времени от дивергенции перемещения $\operatorname{div}\vec{u}$. Поэтому (14) можно записать в форме, совпадающей с (12,а), что и подтверждает обоснованность зависимостей (6,б) и, следовательно, (6,а). Отрицая справедливость формул (6,б), мы бы не имели права утверждать о справедливости и второго соотношения (1), а также (12) и (12,а). Формулы (6,а) и (6,б), очевидно, можно было бы записать и без таких подробных дополнительных пояснений, используя общеизвестное [2, стр. 49 и др.] правило дифференцирования сложной функции при поочередном фиксировании пространственных координат. Однако, ввиду особой важности этих формул, такой подробный анализ выполнен преднамеренно.

4. Процедура расщепления уравнений Навье–Стокса

Из рассмотренных выше преобразований вытекает важнейшее следствие о том, что ускорение объемной деформации $\ddot{\varepsilon}_o=\operatorname{div}\ddot{\vec{u}}$ для несжимаемой жидкости, как и ее скорость $\dot{\varepsilon}_o=\operatorname{div}\dot{\vec{u}}=0$, тоже равно нулю. Этот результат в свою очередь означает, что уравнения Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости

$$\rho\vec{F}-\operatorname{grad}p+\mu\nabla^2\dot{\vec{u}}=\rho\ddot{\vec{u}} \qquad (15)$$

после наложения оператора div преобразуются к виду

$$\rho\,\mathrm{div}\,\vec{F} - \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,p + \mu\nabla^2\,\mathrm{div}\,\dot{\vec{u}} = \rho\,\mathrm{div}\,\ddot{\vec{u}},$$

откуда следует, что только первые два члена могут отличаться от нуля. Поэтому с учетом, что $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,p = \nabla^2 p$ [5, стр. 180], это уравнение упрощается и принимает вид трехмерного уравнения Лапласа для давления $p = p(x, y, z, t)$ относительно пространственных переменных

$$\nabla^2 p = 0, \tag{16}$$

если, например, $F_i = g$ или даже когда $\mathrm{div}\,\vec{F} = 0$. Попытка применить к уравнениям (15) операцию div, вообще говоря, не нова и описана в [7, стр. 74]. Однако, почему-то упустив из виду возможность применения преобразований (6,а), никто из предшественников так и не получил ни уравнений (8), ни (16).

С учетом (16) уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости при наложении оператора Лапласа ∇^2 приводятся к виду

$$\nabla^2 p = 0, \quad \nabla^2\left(\mu\nabla^2\dot{u}_i - \rho\ddot{u}_i\right) = 0. \tag{17}$$

Эти уравнения с учетом, что

$$\dot{u}_i = \int^{(t)} \ddot{u}_i dt,$$

можно записать в виде четырех условно расщепленных уравнений: одного дифференциального и трех интегро-дифференциальных

$$\nabla^2 p = 0, \quad \nabla^2\left(\nu\nabla^2\int^{(t)}\ddot{u}_i dt - \ddot{u}_i\right) = 0, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad (i = 1,2,3) \tag{18}$$

для разыскания четырех неизвестных $p, \ddot{u}_x, \ddot{u}_y, \ddot{u}_z$. В этом случае аналог уравнения неразрывности $\mathrm{div}\,\ddot{\vec{u}} = 0$ является вспомогательным и может использоваться для выполнения последующих преобразований.

Традиционное граничное условие прилипания жидкости на границе позволяет использовать это условие и для компонент ускорения, т.е. полагать, что на неподвижной границе вектор ускорения $\ddot{\vec{u}}$, как и вектор скорости $\dot{\vec{u}}$, равен нулю.

Для идеальной несжимаемой жидкости, поскольку $\nu = 0$, из (18) получаем классическую систему уравнений

$$\nabla^2 p = 0, \quad \nabla^2 \ddot{u}_i = 0, \tag{18,a}$$

решение которой может быть получено общеизвестными методами.

5. Уравнения переноса вихрей для пространственного течения

Из уравнений Навье – Стокса можно исключить давление, применив операцию rot. Этот прием хорошо известен и, вероятно [2, стр. 531], принадлежит Гельмгольцу. В результате таких преобразований получены уравнения распространения (переноса) вихрей. Однако, по общепринятому [2, стр. 531; 8, стр. 74] мнению, только для плоского течения их удается свести к традиционному виду

$$\nu \nabla^2 \Omega = \frac{d\Omega}{dt}, \quad 2\Omega = \mathrm{rot}\,\dot{\vec{u}}, \tag{19}$$

который, например, имеет и общеизвестное уравнение конвективного теплообмена [1, стр. 261]. И, тем не менее, путем дополнительных преобразований с учетом (6,а) можно показать, что уравнения переноса вихрей в векторной форме и для плоского, и для пространственного течения несжимаемой жидкости имеют совершенно одинаковый вид, т.е. (19). При переходе к скалярной записи для плоского течения остается одно уравнение, а для пространственного течения – три.

С целью придания максимальной прозрачности дальнейшим достаточно громоздким преобразованиям запишем выражения для всех компонент $2\Omega_i = \mathrm{rot}_i \ddot{\vec{u}}$ в трехмерном случае

$$\mathrm{rot}_x \ddot{\vec{u}} = \frac{\partial \ddot{u}_z}{\partial y} - \frac{\partial \ddot{u}_y}{\partial z}, \quad \mathrm{rot}_y \ddot{\vec{u}} = \frac{\partial \ddot{u}_x}{\partial z} - \frac{\partial \ddot{u}_z}{\partial x}, \quad \mathrm{rot}_z \ddot{\vec{u}} = \frac{\partial \ddot{u}_y}{\partial x} - \frac{\partial \ddot{u}_x}{\partial y}, \tag{20}$$

а также предоставим подробный вывод выражения для одной из компонент вихрей, например, для $\mathrm{rot}_x \ddot{\vec{u}}$. В таком случае, продифференцируем развернутые выражения соответствующих компонент ускорения, представленных системой (2)

$$\frac{\partial \ddot{u}_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial t} + \dot{u}_x \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial x} + \dot{u}_y \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial y} + \dot{u}_z \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} \right) =$$

$$= \frac{\partial^2 \dot{u}_z}{\partial y \partial t} + \dot{u}_x \frac{\partial^2 \dot{u}_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial y}\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial x} + \dot{u}_y \frac{\partial^2 \dot{u}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y}\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial y} + \dot{u}_z \frac{\partial^2 \dot{u}_z}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial y}\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \ddot{u}_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \dot{u}_y}{\partial t} + \dot{u}_x \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x} + \dot{u}_y \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y} + \dot{u}_z \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial z} \right) =$$

$$= \frac{\partial^2 \dot{u}_y}{\partial z \partial t} + \dot{u}_x \frac{\partial^2 \dot{u}_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial z}\frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x} + \dot{u}_y \frac{\partial^2 \dot{u}_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial z}\frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y} + \dot{u}_z \frac{\partial^2 \dot{u}_y}{\partial z^2} + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z}\frac{\partial \dot{u}_y}{\partial z}. \qquad (21)$$

После вычитания полученных выражений и группирования их членов имеем такое соотношение:

$$\frac{1}{2}\mathrm{rot}_x \ddot{\vec{u}} = \bar{\Omega}_x = \frac{\partial \Omega_x}{\partial t} + \dot{u}_x \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \dot{u}_y \frac{\partial \Omega_x}{\partial y} + \dot{u}_z \frac{\partial \Omega_x}{\partial z} +$$

$$+\Omega_x \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y} + \Omega_x \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} + \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial y}\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial x} - \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial z}\frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x}, \qquad (22)$$

откуда отчетливо видно, что для плоского течения

$$\frac{1}{2}\mathrm{rot}_x \ddot{\vec{u}} = \bar{\Omega}_x = \frac{d\Omega_x}{dt} + \Omega_x \,\mathrm{div}\dot{\vec{u}}. \qquad (22,a)$$

В таком случае напрашивается вывод, что эта формула должна оставаться справедливой и для пространственного течения. Эту аналогию смог бы подметить и автор [2, стр. 531], детализируя до подробностей свои преобразования. Поэтому два последних члена в (22), вероятно, могут быть приведены к выражению $\Omega_x \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x}$. С целью проверить это предположение, запишем выражения для каждого из множителей двух последних членов (22), применяя уже использовавшееся ранее правило для преобразования производной согласно формулам (6,a)

$$\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial y} = \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}, \quad \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial x} = \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial z} = \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}, \quad \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x} = \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}. \qquad (23)$$

Взаимное перемножение членов каждой строки (23) и последующее вычитание действительно дает выражение для двух последних членов в виде $\Omega_x \dfrac{\partial \dot{u}_x}{\partial x}$, и поэтому соотношение (22) принимает вид

$$\frac{1}{2}\mathrm{rot}_x \ddot{\vec{u}} = \bar{\Omega}_x = \frac{\partial \Omega_x}{\partial t} + \dot{u}_x \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \dot{u}_y \frac{\partial \Omega_x}{\partial y} + \dot{u}_z \frac{\partial \Omega_x}{\partial z} + \Omega_x \left(\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} \right), \qquad (22,б)$$

фактически совпадающий с (22,а).

Выражения для остальных двух компонент запишутся аналогично и поскольку для несжимаемой жидкости $\mathrm{div}\dot{\vec{u}} = 0$, то уравнения переноса вихрей для пространственного течения в векторной форме принимают, как и для плоского течения, тот же вид (19). В скалярной форме имеем три уравнения

$$\nu \nabla^2 \Omega_i = \frac{d\Omega_i}{dt}, \quad (i = x, y, z), \qquad (24)$$

однако для их решения требуются еще три соотношения для компонент скорости, которые согласно (22,б) входят в выражения для конвективной составляющей $\bar{\Omega}_i = \dfrac{d\Omega_i}{dt}$. Эти соотношения можно получить, если воспользоваться общеизвестной формулой для восстановления векторного поля по его вихрям и дивергенции [5, стр. 223]. Но поскольку $\mathrm{div}\dot{\vec{u}} = 0$, то эта формула не имеет члена, содержащего $\mathrm{div}\dot{\vec{u}}$, и принимает вид

$$\dot{\vec{u}} = \frac{1}{4\pi}\mathrm{rot} \iiint \frac{\mathrm{rot}\dot{\vec{u}}}{r} dV. \qquad (25)$$

Если выражения для компонент $\dot{u}_i$ согласно (25) подставить в правую часть (24), то получим необычайно сложную систему из трех интегро-дифференциальных уравнений для определения Ω_i. Подобный подход рассматривается и в [9], но без использования формул (23), что привело к еще более сложным уравнениям. Если же в качестве искомой величины принять $\bar{\Omega}_i = \dfrac{d\Omega_i}{dt}$, т.е. $\Omega_i = \int \bar{\Omega}_i dt$, то связанные дифференциальные уравнения для компонент вихрей согласно (24) можно привести к условно расщепленным интегро-дифференциальным уравнениям

$$\nu \nabla^2 \int \bar{\Omega}_i dt = \bar{\Omega}_i, \quad i = x, y, z, \qquad (26)$$

содержащим знак интеграла под знаком частных производных.

6. О существовании и гладкости решений уравнений Навье – Стокса

Из полученных выше результатов вытекает, что первоначальная формулировка проблемы доказательства существования и гладкости решений классических уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости, вероятно, нуждается в пересмотре. Она фактически потеряла свою значимость, поскольку уравнения Навье–Стокса удалось свести к более простым и лучше изученным уравнениям. Для окончательного завершения вопроса достаточно просто воспользоваться известными доказательствами существования и гладкости для хорошо изученных классических уравнений ($\nabla^2 p = 0$) и, возможно, выполнить некоторые исследования по согласованию с особенностями первоначально сформулированной проблемы.

Поскольку давление в несжимаемой жидкости определяется из уравнения Лапласа (16), то, в силу общеизвестных свойств гармонических функций [5, стр. 215-217], вопрос о существовании решения, непрерывности и гладкости функции p решается однозначно, если предположить, что на границе исследуемой области функция $p(x, y, z, t)$ принимает какие-то конечные значения и непрерывна. Однако вопрос о непрерывности $p(x, y, z, t)$ этим не закрывается, поскольку можно говорить о существовании первой и второй производных только по пространственным координатам $x_i = x, y, z$. Что же касается производных по времени $\partial p / \partial t$, то этот вопрос пока остается открытым. Остается открытым вопрос и правомочности предположения о конечных значениях давления на границе исследуемой области. Такое предположение будет вполне обоснованным, если имеются в виду участки границы, например, со свободной поверхностью жидкости. Однако, на участках контакта с жесткой стенкой, где имеет место прилипание жидкости, подобные предположения для давления требуют дополнительных обоснований. Но с учетом свойств гармонической функции можно уверенно утверждать, что давление не может быть бесконечно большим во всех точках на границе области определения. Отмеченные сомнительные детали мы рассмотрим потом и будем полагать, что на границе исследуемой области функция $p(x, y, z, t)$ принимает какие-то конечные значения и является непрерывной по пространственным координатам $x_i = x, y, z$. В этом случае $p(x, y, z, t)$ во всех точках исследуемой области будет гладкой функцией координат $x_i = x, y, z$.

Из теории напряжений в деформируемой сплошной среде известно [3, стр. 53], что нормальные напряжения σ_ν на октаэдрических площадках (одинаково наклоненных по отношению к главным осям) и давление p связаны между собой соотношением

$$\sigma_\nu = \sigma_{cp} = -p. \tag{27}$$

Поэтому напряжение σ_ν как и p тоже является гладкой функцией и имеет непрерывные производные по пространственным координатам x_i.

В свою же очередь результирующее напряжение p_ν на октаэдрической площадке определяется через главные напряжения по формуле [3, стр. 53]

$$p_\nu^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2). \tag{28}$$

Поскольку нормальные напряжения $\sigma_\nu = -p$ являются гладкими и, разумеется, непрерывными функциями координат, то такими же свойствами, вероятно, обладают и результирующие напряжения p_ν на этих площадках. И действительно, вектор σ_ν является проекцией вектора p_ν на нормаль к площадке, к которой приложено напряжение p_ν. А проекция вектора на какую-либо ось координат, например, на ту же нормаль может быть гладкой функцией только в том случае, если сам вектор обладает такими же свойствами.

Вполне очевидно, что каждый член канонической квадратичной формы в формуле (28) является положительной величиной, а член в левой части – конечная и непрерывная величина и при том являющаяся гладкой функцией пространственных координат. Следовательно, такими же свойствами обладает и сумма членов правой части (28). К тому же

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = -3p,$$

и поэтому трехчлен $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$, как и $(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)$, тоже гладкая функция. Для того чтобы и сумма, и сумма квадратов одних и тех же трех членов были гладкими функциями, несомненно, требуется гладкость каждого члена. Из этого следует, что главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ являются гладкими функциями в произвольно ориентированной системе координат.

Нормальные σ_{ii} и суммарные касательные напряжения τ на произвольно ориентированной площадке, как известно [3, стр. 50] , выражаются через главные напряжения согласно формулам

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ii} = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2, \\
&\tau = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^3 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2),
\end{aligned} \tag{29}$$

где l, m, n – косинусы углов наклона между нормалями к площадкам действия компонент σ_{ii} и $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ соответственно (направляющие косинусы).

Поскольку $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – гладкие функции координат, то такими же свойствами, как следует из (29), обладают σ_{ii} и τ.

Запишем теперь определяющие соотношения для нормальных и касательных напряжений несжимаемой жидкости [2, стр. 448]

$$\sigma_{ii} = -p + 2\mu \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_i}, \quad \sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial \dot{u}_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right). \tag{30}$$

Поскольку два из трех членов первых соотношений, т.е. σ_{ii} и p, гладкие функции координат, то и третьему члену, а точнее производной $\partial \dot{u}_i / \partial x_i$, очевидно, тоже присущи эти свойства. Для доказательства гладкости производных $\partial \dot{u}_i / \partial x_j$ выполним преобразование второй формулы (30), используя (6,а)

$$\sigma_{ij} = \mu \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial \dot{u}_i} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_j} \frac{\partial x_j / \partial x_i}{\partial x_i / \partial x_j} \right) = \mu \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial \dot{u}_i} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_j} \right). \tag{31}$$

Поскольку суммарные касательные напряжения τ, как мы уже установили, являются гладкими функциями координат, то их проекции σ_{ij}, очевидно, тоже гладкие функции. В таком случае и вся правая часть (31) обладает свойством гладкости. Но каждый член в скобках в свою очередь является гладкой функцией, и поэтому второй множитель произведения $\partial x_i / \partial x_j$, несомненно [11, стр. 70], гладкая функция.

Итак, мы установили, что первые производные по пространственным координатам от компонент скоростей являются гладкими функциями. Это же в свою очередь означает, что сами компоненты скорости $\dot{u}_i$ тоже являются гладкими функциями, поскольку наличие не только гладких, но и всего лишь непрерывных производных подтверждает такой вывод.

Свойство гладкости всех первых производных $\partial \dot{u}_i / \partial x_j$ дает основание утверждать, что существуют и непрерывные вторые производные $\partial^2 \dot{u}_i / \partial x_j^2$. Поэтому лапласиан $\nabla^2 \dot{u}_i$, очевидно, представляет собой непрерывную функцию пространственных координат x_1, x_2, x_3.

А теперь запишем уравнения Навье – Стокса с развернутой правой частью

$$\rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 \dot{u}_i = \rho \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t} + \dot{u}_x \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x} + \dot{u}_y \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial y} + \dot{u}_z \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial z} \right). \tag{32}$$

Если компоненты вектора внешней силы представляют собой непрерывные функции, то левые части этих уравнений в целом, очевидно, тоже непрерывные функции, поскольку два последующих члена, как мы уже установили, этим свойством обладают. В таком случае и правые части в целом могут рассматриваться как непрерывные функции пространственных координат x_i. Каждый из трех последних членов правой части (32) представляет собой произведение непрерывных функций. Поэтому все три члена, а также их сумма (конвективная производная), тоже обладают свойствами непрерывности. Но в силу непрерывности всей правой части такими же свойствами, несомненно, обладают и производные по временной координате $\partial \dot{u}_i / \partial t$. Непрерывность всех производных $\partial \dot{u}_i / \partial x_i$ и $\partial \dot{u}_i / \partial t$ означает, что компоненты скорости являются гладкими функциями в целом. Однако, свойства абсолютной гладкости компонент скорости обеспечиваются, очевидно, только в том случае, когда давление является непрерывной функцией времени t. Если принять во внимание, что в уравнение для давления (16) время t входит не как переменная, а в качестве параметра, то непрерывность функции $p(t)$ в исследуемой области в силу ее гармоничности будет обеспечена, когда $p(t)$ непрерывна на ее границе.

Автор не настаивает, что приведенные выше соображения по поводу гладкости решения уравнений Навье–Стокса непогрешимы. Профессиональные математики, несомненно, найдут в них слабо аргументированные и основанные на интуиции места, касающиеся в первую очередь совершенно элементарных доказательств о гладкости и непривычного для них непрофессионального стиля изложения и поэтому требующие дополнительного анализа. Эти элементарные доказательства базируются на единственном правиле, в соответствии с которым сумма, разность, произведение и частное от деления гладких функций тоже представляют собой гладкую функцию [11, стр. 70]. С целью упредить еще одно наиболее существенное замечание, автор считает своим долгом изложить и проанализировать его сам. Дело в том, что формула (16) может быть получена только с учетом, что частные производные компонент скорости являются непрерывными функциями пространственных координат, поскольку при выводе (16) оператор дивергенции вводится под оператор Лапласа и поэтому изменяется порядок дифференцирования. Таким образом, в п.6 доказывается то, что, казалось бы, не требует доказательства, поскольку является исходной предпосылкой при выводе (16). Однако, если расширить эти рассуждения, то такой же упрек можно поставить и к формулировке шестой проблемы в целом. И действительно, при выводе уравнений движения сплошной среды основным предположением является обязательная непрерывность и дифференцируемость необходимое число раз компонент тензора напряжений [1, стр. 143; 13, стр. 285 и др.]. Поэтому уравнения Навье – Стокса могут использоваться только с учетом упомянутого предположения. В связи с этим и с учетом (30) необходимость доказательства наличия таких же свойств у компонент скорости, очевидно, отпадает, а формулировка проблемы, должна быть иной. В целесообразности подобных формулировок применительно к уравнениям, описывающим физические процессы, вероятно, не только сомневался Л.Д. Ландау, но и почему-то был противником их изучения физиками. Его заявление «я категорически считаю, что из математики, изучаемой физиками, должны быть полностью изгнаны всякие теоремы существования, слишком точные доказательства и т.п.» [12, стр. 236] свидетельствует о его непреклонной негативной позиции по этому поводу. И даже без учета этих замечаний с появлением возможности преобразования уравнений Навье–Стокса к более простым, в том числе и к классическим, уравнениям следует признать существенную девальвацию, и даже перемещение на задний план проблемы абсолютно непогрешимого доказательства существования и гладкости их решения. В таком случае приведенные выше рассуждения о существовании и гладкости решений уже не в состоянии претендовать на прежнюю особую актуальность и могут показаться лишь непрофессиональной попыткой автора как-то согласовать содержание работы с исходной формулировкой шестой математической проблемы тысячелетия.

7. Губительные последствия недооценки значимости теорем существования

Л.Д. Ландау, формулируя свои необычайно жесткие оценки для теорем существования, на которые по его же словам «так щедры математики» [12, стр. 232], видимо, имел для этого веские основания. Что именно подтолкнуло этого знаменитого физика на такие негативные оценки, автор может только предполагать. Вполне вероятно, что его оценки были вызваны теми же соображениями, какими руководствовался и автор известной монографии [15, стр. 352] математик М. Клайн, которому принадлежит такое утверждение: «утратив за последние сто лет развития математики – становившейся все более чистой – остроту зрения, математики…обратились к такой далекой от приложений деятельности, как доказательство теорем существования решений дифференциальных уравнений, к аксиоматизации различных наук и к бесплодной игре разума». Однако все же попытаемся отмежеваться от таких, несомненно, авторитетных заключений и зададим себе следующий вопрос. Означает ли исходное предположение об обязательной непрерывности компонент тензора напряжений, что после решения конкретных задач эти же компоненты тоже останутся непрерывными функциями. Для ответа на этот вопрос следует вспомнить ситуацию с математически некорректными (не дифференцируемыми) и физически бессмысленными решениями многих, вошедших в учебники, классических задач для одномерного волнового уравнения [14, стр. 63-118]. Появление таких решений, как выяснилось, обусловлено математически противоречивыми и физически недопустимыми краевыми условиями, которые были приняты только потому, что при постановке этих задач не были сформулированы требования, обеспечивающие существование решений. И хотя в конечном итоге такие решения могут быть причислены к разряду «обобщенных» [14, стр. 79-81], от этого в физическом отношении они не становятся лучше, а их губительное влияние при постановке более сложных задач не меньше. Однако оказывается, если сформулировать непротиворечивые краевые условия, то решения тех же задач получаются в виде гладких и физически приемлемых функций [14, стр. 83-118]. Поэтому и гладкость решений уравнений Навье – Стокса, очевидно, полностью зависит от того, насколько правильно сформулированы краевые условия конкретной задачи. В таком случае формулировка теорем существования должна быть сугубо индивидуальной или же охватывать набор однотипных задач, при постановке которых следует определить, а во многих случаях досконально исследовать, требования к функциям, описывающим краевые условия и обеспечивающим существование гладких решений. При таком подходе к формулированию теорем существования их практическая значимость становится вполне очевидной, а унаследованная физиками жесткая позиция Л.Д. Ландау, существенно подкрепленная математиком М. Клайном, несомненно, будет пересмотрена в первую очередь самими же физиками.

Продолжение следует

Список литературы

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды, т.1. Учебник. – М: Наука, 1970. – 492 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Учебное пособие. – М.: Наука, 1970. – 904 с.
3. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. Учебник. – М.: Высшая школа, 1968. – 512с.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т.2. Учебник.–М: Физматгиз, 1958.– 628 с.
5. Борисенко А.И. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. – Харьков: Изд – во Харьк. ун – та. 1972. – 256 с.
6. Гузь А.Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости. – Киев: «А.С.К.», 1998. – 350 с.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т.6. Гидродинамика. – М.: Наука. 1988. – 736 с.
8. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Перев. с нем. – М: Наука , 1969. – 744с.
9. Петрин А.Б. Метод интегро – дифференциального уравнения в гидродинамике несжимаемой вязкой жидкости. ЖЭТФ, 1997, т. 112, вып. 4(10), с. 1332 – 1339.
10. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М.: Наука. 1965. – 424 с.

11. Макаров И.П. Дополнительные главы математического анализа. Учебное пособие. – Просвещение, 1968. – 308с.
12. Ливанова А.М. Ландау. – М.: Знание, 1983, – 240 с.
13. Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление. – М.: Наука. 1969. – 352 с.
14. Козачок А.А. Парадоксы механики сплошных сред. Новые подходы к постановкам и решения некоторых классических задач математической физики. Учебное пособие. – Киев: «Задруга», 2005. – 212 с.
15. Клайн. М. Математика. Утрата определенности. Перев. с англ. – М:. Мир. 1984. – 424 с.
16. Ладыженская О. А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье– Стокса, существование и гладкость, УМН, 2003, **58**:2(350), 45–78.
17. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Перев. с франц. – М:. Мир. 1972. – 588 с.