

**А. А. Козачок**

# **ПАРАДОКСЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД**

Учебное пособие

## **Новые подходы к постановкам и решения некоторых классических задач математической физики**

Под общей редакцией  
академика НАН Украины В. Г. Барьяхтара

*Рекомендовано Министерством образования и науки Украины  
как учебное пособие для студентов высших учебных заведений*

Киев  
ПВП «Задруга»  
2005

УДК 531  
ББК 22.25я73  
К59

**Козачок А. А.**

К59 Парадоксы механики сплошных сред. Новые подходы к постановкам и решения некоторых классических задач математической физики: Учеб. пособие для студентов ВУЗов / Под общ. ред. В. Г. Барьяхтара. – К.: ПВП «Задруга», 2005. – 212 с.: ил. – Библиогр.: с.82-83, 186-188.

**ISBN 966-8282-76-0**

Представлены результаты научных исследований автора, впервые опубликованные в 2000–2004 гг. Излагаемые положения, преимущественно критического характера, затрагивают фундаментальные аспекты механики сплошных сред, ее основные уравнения и отдельные классические решения. Усвоение содержания требует предварительного усвоения курса механики сплошных сред в минимальном объеме вузовской программы.

Для студентов и аспирантов, а также преподавателей, усвоение которыми освещаемых новых положений, идущих вразрез с общепринятыми, будет способствовать скорейшему реформированию курса механики сплошных сред, и кроме того, математической физики, теории упругости, теории колебаний, строительной механики.

Подано результати наукових досліджень автора, уперше опубліковані в 2001–2004 рр. Викладені положення, переважно критичного характеру, стосуються фундаментальних аспектів механіки суцільних середовищ, її основних рівнянь і окремих класичних розв'язків. Засвоєння змісту потребує попереднього засвоєння курсу механіки суцільних середовищ у мінімальному обсязі програми для вищих навчальних закладів.

Для студентів, аспірантів, а також викладачів, засвоєння якими висвітлених нових положень, що суперечать загальноприйнятим, буде сприяти швидкому реформуванню курсу механіки суцільних середовищ, і крім того, математичної фізики, теорії пружності, теорії коливань, будівельної механіки.

**ББК 22.25я73+22.311я73**

*Рекомендовано к изданию Министерством  
образования и науки Украины  
(Гриф №14/18.2-1621 от 12.07.2004)*

В авторской редакции

© А. А. Козачок, 2005

*Нет ничего тяжелее, как преодолеть груз правильного, но слишком частного знания, пересмотреть традиции своих предшественников. Это – наибольшая оригинальность, которую может достичь человек.*

*К. Трусделл*

## **Предисловие научного редактора к препринту пособия**

В истории науки известны удивительные случаи, когда хорошо известные положения в одной ветви знаний либо умалчиваются, либо практически не обсуждаются в достаточно близкой, но другой области знаний. Доцент Козачок А. А. обратил внимание, что именно так обстоит дело в двух близких областях физики – гидродинамике и механике деформируемого твердого тела. Для описания процессов и явлений в аэродинамике и гидродинамике широко пользуются динамическими уравнениями, записанными в переменных Эйлера. В этих уравнениях, даже без анализа зависимости сил от координат и скоростей имеется нелинейность кинематического происхождения: произведение

$$(\partial V_i / \partial x_i) V_i. \quad (1)$$

В механике деформируемого твердого тела пользуются двумя типами переменных при написании уравнений динамики – переменными Лагранжа и переменными Эйлера. Напомним, что переменные Лагранжа – это переменные, которые «нумеруют» частицы твердого тела. По этой причине динамические уравнения в переменных Лагранжа не имеют слагаемых (1). Эти уравнения представляют собой обобщение уравнения Ньютона на случай сплошной материальной среды.

Переменные Эйлера нумеруют точки лабораторной системы координат, в которой рассматривается деформируемое твердое тело. По

этой причине динамические уравнения сплошного деформированного твердого тела (ДТТ) должны содержать слагаемое (1).

В предлагаемом Вашему вниманию небольшом по объему, но емком по содержанию, пособии подробно анализируются оба используемые в настоящее время подхода для описания: эйлеров и лагранжевы способы описания деформаций. Автор приводит не только общие соображения, но и целый ряд примеров, демонстрирующих преимущества того или другого методов при решении конкретных задач теории ДТТ.

Несомненно, эта работа будет полезна научным работникам, инженерам, аспирантам и студентам старших курсов технических вузов.

Академик Национальной Академии Наук Украины  
В. Г. Барьяхтар

*Как все хорошие девушки уже разобраны и замужем, так и все хорошие задачи решены. И вряд ли я найду что-нибудь достойное среди оставшихся.*

**Л. Д. Ландау, 1929 г.**

*В науке, на определенном этапе развития новых фундаментальных представлений, эрудиция не является той основной чертой, которая позволяет ученому решать задачу, тут главное – воображение, конкретное мышление и в основном смелость.*

**П. Л. Капица, 1966 г.**

*Чрезмерный объем научных знаний ученого может явиться тормозом для его творческой деятельности, когда начинает казаться, что все до него уже сделано. Часто новое открывает человек, неотягченный чрезмерно большими знаниями.*

**А. Ю. Ишлинский, 1978 г.**

## **Предисловие автора к препринту пособия**

Высказывания знаменитых ученых по поводу непосильного бремени научной эрудиции, часто вызывающей упадочные настроения, особенно злободневны в нынешний период стремительного нарастания информационного потока.

С сомнениями молодого Л. Д. Ландау, взятыми в качестве эпиграфа, созвучны и те упреки, которые пришлось услышать автору этих строк от высокоэрудированных специалистов в области механики деформируемого твердого тела в процессе их первого знакомства с основными положениями, излагаемыми в учебном пособии. В подытоженном виде эти упреки сводятся к тому, что механика вообще и теория упругости в частности, как фундаментальная наука, уже исчерпала себя, поскольку ее основные принципы были сформулированы еще в 18-19 в. в. и временем подтвердили свою незыблемость. Из фундаментальной развивающейся науки механика якобы давно превратилась в консервативную, прикладную область знаний, о чем, например, свидетельствует содержание и даже само название международного журнала «Прикладная механика», издаваемого Национальной

Академией Наук Украины. Поэтому пересмотр фундаментальных устоев механики, который якобы навязывает автор пособия, по мнению профессионалов – дело неблагодарное, а скорее всего – удел дилетантов и авантюристов.

Для такого сорта эпитетов и оценок, видимо, сам автор дал повод вызывающими, по мнению некоторых профессионалов, названиями своих статей: «Парадоксы классических решений волнового уравнения», «Парадоксальные особенности фундаментальных классических уравнений динамики деформируемых сред», «Сомнительные принципы подхода к отождествлению переменных Эйлера и Лагранжа в динамике деформируемых сред». К тому же в двух последних работах опровергалось казавшееся незыблемым и вошедшее во многие учебники фундаментальное положение о величине погрешности уравнений Ламе, которые по общему мнению, при записи в переменных Лагранжа якобы позволяют корректно избежать нелинейности, т. е. избавиться от конвективных членов. Убежденность специалистов в незыблемости этого фундаментального положения привела в конечном итоге к тому, что в некоторых авторитетных университетских учебных пособиях по механике деформируемого твердого тела переменные Эйлера даже не упоминаются.

Наряду с упомянутым автором было показано, что многие общеизвестные точные решения классических задач, вошедшие в качестве типовых в учебники по математической физике, теории колебаний и др., содержат серьезные противоречия, бессмысленны с физической точки зрения и поэтому непригодны для практического применения, а следовательно, и в учебном процессе. Однако необходимо отдать должное большинству профессионалов, сперва отрицательно воспринявших суждения автора, за терпение, способность разобраться по существу, за проявленное мужество после длительных дискуссий все же принять точку зрения автора.

Прежде всего автор выражает глубокую признательность специалистам, внимательно изучившим отдельные из упомянутых работ и предоставившим письменные рецензии, а именно: заведующему кафедрой теоретической и прикладной механики Киевского Национального университета им. Тараса Шевченко, д. ф.-м. н., проф. Мелешко В. В.,

заведующему отделом института механики НАНУ, д. ф.-м. н., проф. Каюку Я. Ф., профессору кафедры высшей математики Национального технического университета Украины “КПИ”, д. ф.-м. н. Вирченко Н. А., ведущему научному сотруднику института механики НАНУ, д. ф.-м. н. Плахтиенко М. П. и старшему научному сотруднику, к. т. н. Антонюку Е. Я., научному сотруднику института математики НАНУ, к. ф.-м. н. Щепанюку Г. В.

Автор весьма признателен и специалистам, которые внимательно познакомились с его работами, а после дискуссий и многократного обсуждения поддержали выводы и предложения рецензентов или же сформулировали свое особое мнение: чл.-корр. НАНУ Матвееву В. В. (институт проблем прочности НАНУ), чл.-корр. НАНУ Горбачуку М. Л. и д. ф.-м. н., проф. Троценко В. А. (институт математики НАНУ), акад. АН Высшей школы, д. ф.-м. н., проф. Горошко О. А. и д. ф.-м. н., проф. Самойленко В. Г. (Киевский Национальный университет им. Тараса Шевченко), д. ф.-м. н., проф. Селезову И. Т. (институт гидромеханики НАНУ), д. т. н., проф. Павловскому М. А. (Национальный технический университет Украины “КПИ”).

Автор выражает признательность чл.-корр. НАНУ Локтеву В. М., д. ф.-м. н., проф. Джежере Ю. И., д. т. н., проф. Василенко Н. В. (Национальный технический университет Украины “КПИ”), принявших активное участие в обсуждении отдельных публикаций или же представивших свои рекомендации.

Автор признателен и тем специалистам, которые проявили внимание к публикациям, за многочисленные дискуссии в процессе личных встреч по затронутым проблемам: акад. НАНУ Гринченко В. Т. (институт гидромеханики НАНУ), чл.-корр. НАНУ Шульге Н. А. (институт механики НАНУ), чл.-корр. НАНУ Улитко А. Ф. (Киевский Национальный университет им. Тараса Шевченко).

Внимание и доброжелательность по отношению к автору, организация рецензирования публикаций, а также их обсуждение директором института математики НАНУ, акад. Самойленко А. М., деканом механико-математического факультета Киевского Национального университета им. Тараса Шевченко, чл.-корр. НАНУ Перестюком Н. А., проректором Национального технического университета Украины “КПИ”, чл.-корр. НАНУ Ильченко М. Е. вызывают у автора чувство глубокой благодарности.

Автор благодарен директору института механики НАНУ акад. Гузю А. Н. за любезное предложение и предоставленную возможность изложить свои взгляды в докладе на общеинститутском семинаре.

Особую признательность автор выражает научному редактору, декану физико-математического факультета Национального технического университета Украины “КПИ”, акад. НАНУ Барьяхтару В. Г. за предложение подготовить учебное пособие, за поддержку и за большой труд по его редактированию.

*Если это и покажется противоречащим истине, то мы должны, однако, больше доверять вычислениям, чем нашему рассудку.*

**Л. Эйлер**

*Как часто мы наблюдаем, что ученые, старея, становятся в оппозицию к новым теориям.*

**П.Л. Капица**

*Математики или люди с математическим складом ума часто при «изучении» физики теряют физику из виду и впадают в заблуждение*

**Р. Фейнман**

*Науку и технику надо изображать не как склад готовых открытий и изобретений, а как арену борьбы.*

**В.О. Ключевский**

## **Предисловие автора к расширенному изданию учебного пособия**

Высказывания Л. Эйлера и Р. Фейнмана, приведенные совместно в качестве эпиграфа, проливают свет на одну из возможных причин возникновения тех загадочных недоразумений, которые совершенно случайно удалось обнаружить в теории распространения волн в упругих средах. Причем, теперь эти недоразумения уже очевидны. Однако приходится удивляться, почему они, незамаскированные, а теперь уже хорошо заметные как находящиеся на поверхности, не были обнаружены на протяжении столь продолжительного времени? Как можно допустить несовместимость общепринятой, излагаемой даже в учебниках для средней школы, физической интерпретации и математической постановки конкретной задачи? Почему такая несовместимость присуща не как исключение одной-двум задачам, а встречается во многих простейших типовых примерах, которые уже давно вошли в учебники различных курсов для высших учебных заведений и по существу стали классическими?

Чтобы и дальше не оставлять читателя в неведении, о чем идет речь, напомним хорошо и давно известный из опыта факт, что возмущения в упругой среде распространяются не мгновенно, а с определенной скоростью, именуемой скоростью звука. Поэтому при математической постановке соответствующих задач эту весьма существенную особенность, несомненно, следовало бы как-то учитывать. И вряд ли об этом стоило напоминать, если бы на практике все было бы именно так. Напротив, банальная истина о том, что возмущение в сплошных средах распространяется со скоростью звука хотя часто [1 (см. ч.2)] и оговаривается, но тут же, при математической постановке задачи, почему-то ускользает из поля зрения. Авторитет наших выдающихся предшественников, давших науке классические решения этих задач, видимо, оказался тем непосильным грузом, который на протяжении более ста лет не позволял даже предположить о возможности появления

ошибочных результатов. И действительно, утверждать, что точные решения большинства задач, посвященных колебаниям стержней, в знаменитой книге С.П. Тимошенко [2 (см. ч.2)] содержат серьезные математические противоречия и зачастую физически бессмысленны, могут, казалось бы, только абсолютные невежды. На самом же деле, и это уже признали многие специалисты, ситуация сложилась именно так.

С момента публикации первой статьи «Парадоксы классических решений волнового уравнения» в 2000 г. прошло достаточно много времени. Первоначальные категорические утверждения оппонентов по поводу нелепости основных ее положений и выводов уже остались позади. Процесс признания прошел все три традиционных этапа: категорическое отрицание, постепенное восприятие и, наконец, отрицание существенной роли автора в формулировании, сперва казавшихся нелепыми, выводов.

В материалах X Международной конференции им. акад. Кравчука (см. Козачок А.А. Сомнительное наследие эпохи великих математиков. Киев, 2004 г., с. 686), а также в [29 (см. ч. 2)] уже освещены причины упомянутых выше противоречий классических решений. И многие специалисты, ознакомившись с этими причинами, несомненно, с огорчением заметили, что и они, и их коллеги тоже пошли по такому же, как и предшественники, традиционному, но ложному пути. При решении более сложных, современных задач о свободных колебаниях механических систем начальные условия тоже обычно отождествляются с теми условиями, которые свойственны механической системе в статическом состоянии, когда на систему еще действуют удерживающие силы. И то, что после устранения удерживающих сил статическая картина коренным образом изменяется, а возмущенная область охватывает систему постепенно, т.е. расширяется со скоростью звука, почему-то упускают из виду при математической постановке задачи. Забывают почему-то и о хорошо известной проблеме связанных упругих полей, которая в задачах такого типа осложняется тем, что упругие поля имеют переменные границы. Упускают из виду и то, что общая граница этих упругих полей перемещается со скоростью звука. А это, в свою очередь, приводит к перераспределению массы между возмущенной и невозмущенной областями тоже с такой же скоростью.

Упомянутое выше фактически означает, что пересмотру подлежат не только простейшие классические задачи, вошедшие в качестве типовых в учебники по различным дисциплинам. По мнению некоторых рецензентов, пересматривать необходимо и необозримое множество задач, решения которых накапливались на протяжении десятилетий многими научными учреждениями (см. приложение 1). Такая перспектива некоторых, особо влиятельных ученых, научный багаж которых базируется на устаревших ошибочных представлениях, разумеется, мало устраивает. Именно поэтому

первоначальная поддержка внедрения упомянутых выше положений в учебные пособия по различным дисциплинам в ряде случаев сменилась на жесткое, но молчаливое сопротивление. Сложившуюся ситуацию по этому поводу наилучшим образом характеризуют высказывания П.Л. Капицы и В.О. Ключевского, приведенные в качестве эпиграфа.

И тем не менее, благодаря поддержке Министерства образования и науки Украины, с первой частью учебного пособия уже ознакомились специалисты ведущих отечественных и зарубежных вузов. Многие из них представили свои отзывы и замечания, которые в ряде случаев имеют оттенок достаточно жесткой дискуссии с автором (см. приложения). Отзывы поступили из Львовского национального университета (доц. Галазюк В.А.), из Днепропетровского национального университета (проф. Ободан Н.И.), из Львовского института физической оптики (проф. Влох Р.О.), из Киевского национального университета им. Тараса Шевченко (проф. Мольченко Л.В.), из Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина (проф. Адаменко И.Н). Все отзывы, кроме двух последних, имеются в приложениях к пособию. Они, а также отзывы будущих рецензентов, будут опубликованы в экземплярах основного тиража пособия,

Министерству образования и науки Украины была направлена рецензия на учебное пособие также Министерством образования республики Беларусь. Рецензию подготовили специалисты Белорусского государственного университета: декан механико-математического факультета проф. Юрчук Н.И., заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики проф. Журавков М.А. и профессор кафедры Мартыненко М.Д.

Автор с удовлетворением и с чувством благодарности за проявленный интерес к пособию хотел бы засвидетельствовать свое глубокое уважение всем упомянутым выше специалистам независимо от их оценок и занимаемых позиций, которые, даже вступая в противоречие с позицией автора, оказывают большую услугу в установлении научной истины, не говоря уже об устранении методических упущений и досадных опечаток. Приведенные в конце пособия в виде приложений, они по сути дела возрождают ту знаменитую дискуссию, которую не закончили наши выдающиеся предшественники: Даламбер, Эйлер, Д. Бернулли.

И в заключение автор с чувством искренней благодарности считает своим долгом отметить, что излагаемые в учебном пособии научные результаты впервые освещались на ежегодных Международных конференциях «Гидроаэромеханика в инженерной практике» в 2000–2005 г. благодаря исключительно доброжелательному отношению и поддержке бессменного председателя оргкомитета конференции проф. Яхно О.М.

*Для правильного обучения современной молодежи нужно воспитывать в ней творческие способности... Это фундаментальная задача, от решения которой может зависеть будущее нашей цивилизации не только в одной стране, но и в глобальном масштабе, задача не менее важная, чем проблема мира и предотвращения атомной войны.*

**П. Л. Капица**

## **Введение**

Усвоение содержания учебного пособия, предлагаемого вниманию читателя, требует предварительного изучения курса механики сплошной среды в объеме минимальной вузовской программы.

Поскольку в первой части пособия излагаются материалы преимущественно критического характера, которые были опубликованы впервые в 2001–2004 г. г., то вполне естественно, что читатель не сможет найти упоминания о них в общеизвестных университетских курсах.

Пособие предназначено не только для студентов, но и для преподавателей, освоение которыми освещаемых в нем новых положений, идущих вразрез с общепринятыми, будет способствовать скорейшему реформированию изложения курса механики сплошных сред. И поскольку новые положения затрагивают фундаментальные аспекты механики сплошных сред – ее основные уравнения, то существенному реформированию подлежат и некоторые разделы других дисциплин, которые используют и развивают упомянутые, подвергшиеся пересмотру, аспекты. В первую очередь такое реформирование, очевидно, затронет, хотя и в разной степени, курсы математической физики, теории упругости, теории колебаний, сопротивления материалов, строительной механики.

Освещаемые в учебном пособии положения в ряде случаев не являются абсолютно новыми в широком смысле, поскольку иногда речь идет о пересмотре значимости известных фактов там, где, по общепризнанному и устоявшемуся на протяжении нескольких веков мнению, они считались несущественными. В данном случае имеются в виду конвективные члены в выражении для ускорения, записанного в

эйлеровых переменных, безоговорочное пренебрежение которыми в гидродинамике, как известно, недопустимо, а в механике деформируемого твердого тела почему-то общепринято и считается незыблемым.

Пересмотр этого положения в механике деформируемого твердого тела означает не только девальвацию некоторой части необозримого множества разработок линейной теории упругости, но и необходимость развития тех ее нелинейных аспектов, которые в настоящее время находятся лишь в зачаточном состоянии и традиционно считаются бесполезными для практики, а по мнению многих профессионалов, даже несуществующими.

Характерной особенностью пособия является его направленность на развитие у читателя способностей критически воспринимать изучаемые теоретические положения и пытаться их переосмыслить даже в тех случаях, когда эти положения сформулированы нашими выдающимися предшественниками и представляются бесспорными. Именно поэтому изложение материала выполнено по принципу критического сопоставления со ссылками на первоисточник, в котором высказывается полярная точка зрения. Такой подход, по мнению автора, призван содействовать развитию у студентов задатков творческого мышления и в конечном итоге должен поставить хотя бы какой-то заслон на пути тех возможных дефектов образования, которые в свое время были замечены в университетской системе Великобритании, – “...это ее способность плодить так называемых “грамотеев”, т. е. людей, лишенных творческих задатков, но обладающих хорошей памятью и эрудицией. Эти люди в университете получают высокие ученые степени, но потом приносят очень мало пользы...” (Образованный ученый. Пер. с англ. – М.: Наука, 1979 – с. 16, 17, 37–41).

Основные проблемы, которые затрагиваются в пособии, относятся: к определению условий допустимости отождествления переменных Эйлера и Лагранжа в динамике деформируемых сред, к пересмотру границ применимости линейной теории упругости, к пересмотру многих точных решений классических задач, используемых в качестве типовых в курсах математической физики, теории колебаний и др.

Пособие содержит много примеров и контрольных вопросов, которыми завершается каждый пункт. На каждый вопрос читатель

сможет найти ответ на той или иной странице, но в процессе некоторого труда, связанного с необходимостью прочитать и комментарии к возможному ответу.

Для облегчения самостоятельной работы студентов и развития навыков литературного поиска большинство ссылок на литературные источники содержат и номера страниц, на которых расположены обсуждаемые формулы или научные положения, подвергнутые критике.

Первая часть пособия по сути дела лишь ставит на повестку дня целый ряд фундаментальных проблем нелинейной механики деформируемого твердого тела, причем таких, которые прежде считались несущественными или отсутствующими вообще. Подходы или же методы разрешения этих проблем изложены во второй части.

Некоторые разделы пособия, бесспорно, могут показаться дискуссионными (см. приложения). Но это и не удивительно, поскольку, как оказалось, они иногда уводят читателя к тому знаменитому, но незавершенному «спору о струне», который на протяжении многих лет вели наши выдающиеся предшественники Даламбер, Эйлер, Д. Бернулли. И хотя к этому «спору» впоследствии присоединились Лагранж и Фурье, продолжить его, вероятно, суждено нам и, быть может, нашим преемникам.

## Часть 1. Вопросы нелинейной динамики сплошных сред

*Математика подобно жернову перемалывает то, что под нее засыпают, и, как засыпав лебеду, вы не получите пшеничной муки, так, исписав целые страницы формулами, вы не получите истины из ложных предположений.*

*Томас Хаксли*

*При изучении наук примеры полезнее правил.*

*И. Ньютон*

### **1.1. Сомнительные нюансы общепринятого подхода к отождествлению переменных Эйлера и Лагранжа в динамике деформируемых сред**

#### **1.1.1. Общие положения**

В теории малых статических деформаций [1] возможность отождествления переменных Эйлера и Лагранжа является общепризнанной и не вызывает сомнений. Однако, выполняя такое отождествление при динамическом режиме нагружения сплошной среды, почему-то нередко упускают из виду, что по крайней мере одна из пространственных координат  $x$  становится подвижной и зависит не только от начальной координаты  $x_0$ , но и от времени  $t$ , т. е.  $x = x(x_0, t)$ . Начальные координаты, как и в статике, могут выбираться с достаточным произволом в зависимости от принятой системы отсчета и обычно соответствуют неподвижному и недеформированному состоянию среды. Условие малости перемещений и деформаций как в статике, так и в динамике, позволяет с допустимой точностью считать и начальную, и сопутствующую (или иначе – актуальную [2]) системы координат декартовыми и с достаточным основанием отождествлять переменные Эйлера и Лагранжа, т. е. в окончательных, используемых для численной реализации, формулах при необходимости принимать  $x \approx x_0$ . Упомянутое, однако, совершенно не означает появление такой же возможности отождествления для дифференцируемых величин и

особенно производных по времени  $t$ . Именно эта, весьма существенная, особенность часто выпадает из поля зрения и, несмотря на всю ее очевидность, поскольку  $x = x(x_0, t)$ , в учебных пособиях по механике сплошных сред [1] обычно не обсуждается.

С целью избежать разночтения этого чрезвычайно деликатного вопроса в дальнейших выкладках договоримся, как это и общепринято [1, стр. 54–61; 2, стр. 22–24], под переменными Эйлера подразумевать пространственные, не зависящие от времени  $t$ , декартовы координаты, совпадающие с текущими координатами  $x_i$  каких-то материальных частиц для произвольного момента. Иначе говоря, зависимости, описывающие поведение материальных частиц в переменных Эйлера, позволяют определять их параметры в неподвижных, фиксированных точках пространства, в которых эти частицы появляются в процессе движения. Что же касается зависимостей в переменных Лагранжа, то они позволяют проследивать траектории движения частиц, начиная от их начального положения. Однако, как утверждает автор [3, стр. 88-89], подход к изучению движения, который приписывают Эйлеру, на самом деле предложил Даламбер, а поход Лагранжа – Эйлер.

### 1.1.2. Координатный способ представления закона движения

С целью максимально упростить и сделать прозрачными дальнейшие математические выкладки продолжим их на конкретных примерах. При этом откажемся от анализа многомерных деформационных процессов и сначала будем рассматривать только идеализированные одномерные ситуации, когда от времени  $t$  зависит лишь одна пространственная координата  $x$ . Остальные координаты, хотя и зависят от времени, будем считать не оказывающими существенного влияния на процесс деформирования вдоль координаты  $x$ .

Допустим, что положение продольной координаты  $x$  произвольной материальной частицы (точки) стержня (рис. 1.1), например, с одним закрепленным концом описывается такой зависимостью:

$$x(x_0, t) = \frac{x_0}{1 - A \cos \omega t}, \quad (1.1.1)$$

где  $x_0$  – координата, например конца стержня  $x_0 = l_0$ , в некоторый, принятый за начальный (не обязательно равный нулю), момент времени  $t_0 = \frac{\pi}{2\omega}$ ;  $\omega$  – угловая частота;  $A$  – безразмерный коэффициент.

При такой записи, согласно принятому выше соглашению, независимые аргументы  $x_0$  и  $t$ , очевидно, являются переменными Лагранжа, а зависимость (1.1.1) представляет собой закон движения в координатной форме для произвольной материальной точки, начальная координата которой  $x_0$ , а текущая –  $x$ . Заметим, что начальная координата  $x_0$  в общем случае может зависеть от какого-либо параметра или даже от времени  $t$  (при движении стержня как единого целого).

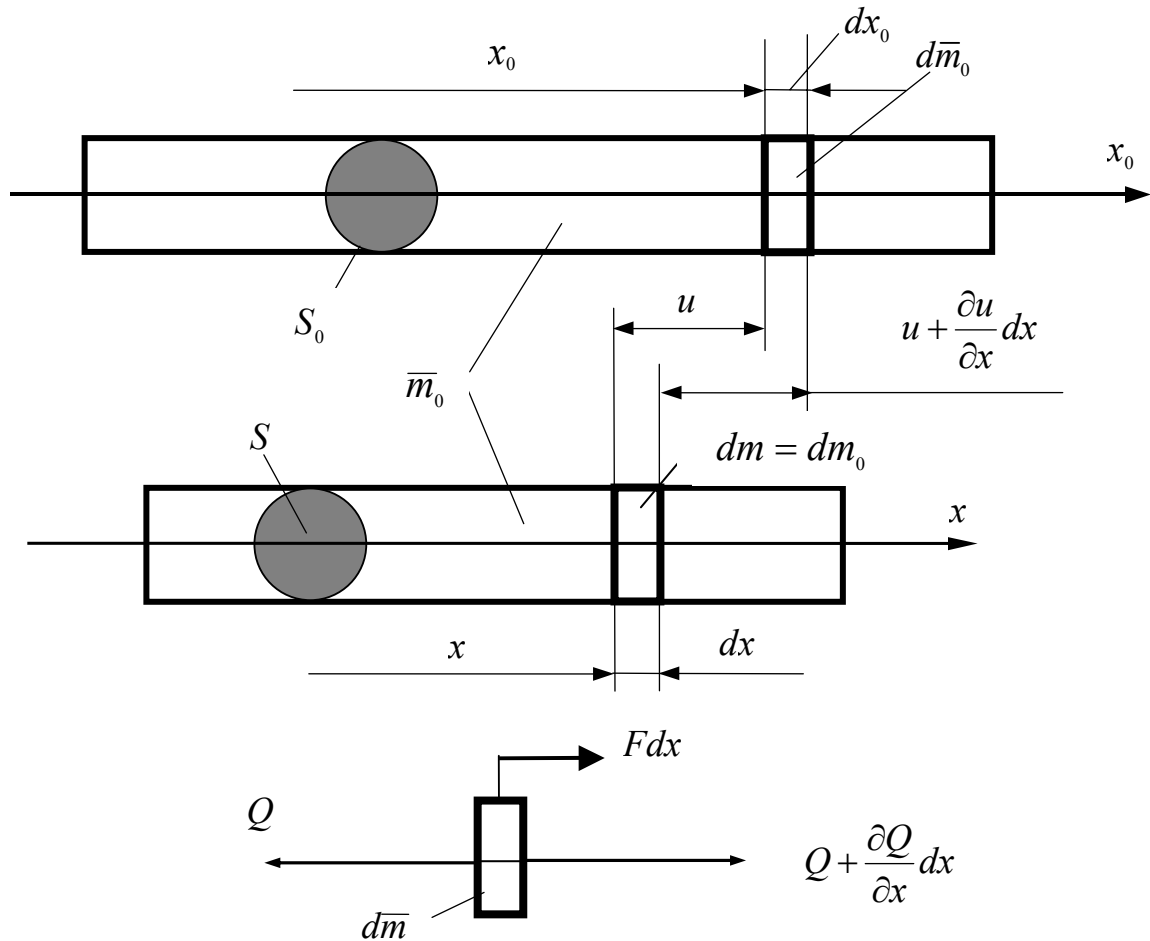


Рис. 1.1. К выводу уравнения движения

Если же соотношение (1.1.1) записать в явной форме относительно  $x_0$ , то получим

$$x_0(x, t) = x(1 - A \cos \omega t). \Rightarrow (x - x_0) / x = A \cos \omega t. \quad (1.1.2)$$

Переход к такой записи позволяет рассматривать  $x$  и  $t$  как независимые переменные и, задавая их значения, разумеется в пределах допустимых

границ изменения, можно определить, каким начальным координатам  $x_0$  они соответствуют. В этом случае представляется возможность указать начальное положение материальной частицы с координатой  $x$  в момент времени  $t$ . Если, например, зафиксировать переменную  $x$ , то при изменении  $t$  можно определять начальные координаты частиц, находящихся именно в точке с координатой  $x$ , но в различные моменты времени. Вторая формула (1.1.2) позволяет определять относительное удлинение в различные моменты времени  $t$ . Поэтому запись закона движения в форме (1.1.2) по существу означает переход к переменным Эйлера. Следует, однако, сделать оговорку, что в этом случае фактически подвижные координаты  $x = x(x_0, t)$  следует относить к неподвижному пространству или иначе, считать фиксированными, поскольку в различные моменты времени в этих точках пространства будут находиться различные материальные частицы.

### 1.1.3. Представление закона движения посредством вектора перемещения

В ряде случаев бывает удобно измерять не текущую координату  $x$ , а величину перемещения частицы, на которой мы фиксируем внимание,

$$u(x, x_0) = x - x_0. \quad (1.1.3)$$

Если в (1.1.3) зафиксировать  $x_0$ , то это дает возможность при различных значениях  $x$  определять перемещение  $u$  одной и той же материальной частицы. В то же время фиксация переменной  $x$  означает, что перемещение определяется для различных материальных частиц. Задавая в первом случае изменение  $x$  согласно (1.1.1), а во втором изменяя  $x_0$  в соответствии с (1.1.2), получим зависимости для закона движения, записанного с использованием перемещения, соответственно в переменных Лагранжа и Эйлера

$$u(x_0, t) = \frac{Ax_0 \cos \omega t}{1 - A \cos \omega t},$$

$$u(x, t) = Ax \cos \omega t. \quad (1.1.4)$$

При определенных условиях можно полагать  $u(x_0, t) = u(x, t)$ . Эти условия получим, приравняв правые части выражений (1.1.4). В нашем случае они, очевидно, имеют вид зависимости между  $x$  и  $x_0$  (1.1.1) или

(1.1.2). Однако, если выполняется условие  $A \cos \omega t \ll 1$ , то согласно (1.1.1) и (1.1.2) переменные Эйлера и Лагранжа мало отличаются между собой, т. е.  $x_0 \approx x$ , и тогда  $u(x_0, t) \approx u(x, t)$  без каких-либо других оговорок.

Таким образом, второе соотношение (1.1.4) считается записанным в переменных Эйлера только с оговоркой, что координата  $x$  фиксируется, т. е. связывается не с материальной частицей, а с неподвижной точкой пространства. Если же связать ее с материальной частицей, то необходимо задать закон ее движения согласно (1.1.1), подставить это выражение в (1.1.4) и фактически перейти к переменным Лагранжа  $x_0, t$ .

Рассмотренные выше нюансы свидетельствуют, что при изучении этого раздела необходимо четко усвоить особенности, связанные с фиксацией подвижных  $x = x(x_0, t)$  и неподвижных  $x_0$  координат и условия, при которых допустимо полагать  $x \approx x_0$ ,  $u(x, t) \approx u(x_0, t)$ .

#### 1.1.4. Об однозначности взаимных преобразований координат

В механике сплошных сред принято считать, что преобразования (1.1.1) в (1.1.2) и обратные являются взаимнооднозначными [1, стр. 55; 2, стр. 24]. В нашем примере из-за линейного характера функции относительно  $x$  и  $x_0$  такая однозначность действительно соблюдается. Однако, можно записать сколько угодно подобных непротиворечивых зависимостей, для которых предположение об однозначности обратных преобразований исключается. Поэтому в подобных случаях следует принимать во внимание лишь физически обоснованные значения.

И действительно, в выражениях

$$x = \frac{Bx_0^2}{1 - A \cos \omega t} \Rightarrow x_0 = \pm \sqrt{\frac{x}{B}(1 - A \cos \omega t)}, \quad (1.1.5)$$

задавая значения  $x_0$ , можно получить только одно, соответствующее каждому  $x_0$ , значение  $x$ . Если же задавать  $x$  по второй формуле, то получим два значения  $x_0$ . Могут встретиться и такие зависимости, в которых взаимные преобразования затруднительны и к тому же многозначны, например:

$$\bar{B}_n x^n + \bar{B}_{n-1} x^{n-1} + \dots = \frac{1}{1 - A \cos \omega t} (B_m x_0^m + B_{m-1} x_0^{m-1} + \dots). \quad (1.1.6)$$

В таких зависимостях количество возможных преобразований определяется количеством действительных корней соответствующего уравнения или же какими-то дополнительными условиями. Могут ли появиться зависимости типа (1.1.6) при решении уравнений движения сплошной среды, мы пока не обсуждаем, но заметим, что обратные преобразования нелинейных функций, как правило, многозначны.

В [2, стр. 32-34] вопросу взаимного преобразования координат уделено достаточно много внимания. Однако автор все свои рассуждения излагает применительно к трехмерной ситуации и, разумеется, в наиболее общем виде, не приводя конкретных примеров. Такой подход, несмотря на всю его привлекательность, имеет существенный недостаток, подмеченный еще И. Ньютоном. Его изречение, приведенное выше в качестве эпиграфа, предостерегает, что при доказательствах по принципу от общего к частному можно упустить на первый взгляд несущественные детали, которые на самом деле являются определяющими. Именно так, по-видимому, произошло и с рассуждениями автора [2]. При рассмотрении вопроса о переходе от переменных Лагранжа к переменным Эйлера, автор [2] вместо анализа элементарного прозрачного примера ограничился только общим заключением: «переход от движения, заданного по Лагранжу, к описанию по Эйлеру сводится только к разрешению неявных функций». Анализируя ситуацию, связанную с переходом от переменных Эйлера к переменным Лагранжа, автор [2] указывает лишь на то, что такой переход «при заданном поле скоростей связан, вообще говоря, с интегрированием обыкновенных дифференциальных уравнений». Далее, переходя к детальному рассмотрению вопроса о преобразовании координат, автор [2, стр. 48] облегчает задачу таким ограничением: “будем рассматривать непрерывные взаимно однозначные преобразования координат”. Именно поэтому ситуации с возможной неоднозначностью, аналогичные рассмотренным в приведенных выше элементарных примерах, выпали из дальнейшего анализа.

Предельно элементарные примеры согласно (1.1.5) и (1.1.6), возможно, могут показаться несерьезными на фоне такого важного вопроса, как преобразование координат. На эту деталь обратил внимание автора акад. НАНУ Самойленко А.М. Однако, автор надеется, что эти примитивные примеры, являющиеся исключением из общепринятого правила, дадут возможность будущим исследователям, находящимся на студенческой скамье, понять, каким путем можно вскрыть новые парадоксы и недоразумения в безграничном океане знаний.

### 1.1.5. Контрольные вопросы

1. Что мы называем законом движения материальной точки (частицы)?
2. Какие параметры закона движения материальной частицы называются лагранжевыми (эйлеровыми) переменными?
3. Назовите действительных авторов лагранжевых и эйлеровых переменных.
4. Приведите примеры записи закона движения материальной частицы в переменных Эйлера и Лагранжа, используя начальную  $x_0$  и текущую  $x$  координаты (координатный способ).
5. Какую следует сделать оговорку, позволяющую считать закон движения записанным в переменных Эйлера?
6. Какие параметры выступают в качестве функции и какие в качестве ее аргументов при записи закона движения в переменных Эйлера и Лагранжа?
7. Приведите примеры записи выражений для перемещения в переменных Эйлера и Лагранжа?
8. Назовите условия, допускающие поставить знак равенства (в т. ч. и приближенного) между выражениями для  $u(x_0, t)$  и  $u(x, t)$ .
9. В каких переменных выполнена запись для перемещения  $u = x - x_0$ ?
10. Как перейти к переменным Эйлера или Лагранжа в выражении для перемещения  $u(x, x_0) = x - x_0$ ?
11. Что означает фиксация координаты  $x$  в выражении  $u = u(x, t)$ ?
12. Что означает фиксация координаты  $x_0$  в выражении  $u = u(x_0, t)$ ?
13. К чему приведет подстановка  $x = x(x_0, t)$  в выражение  $u = u(x, t)$ ?
14. К чему приведет подстановка  $x_0 = x_0(x, t)$  в выражение  $u = u(x_0, t)$ ?
15. Расскажите об отличиях в фиксации координат  $x = x(x_0, t)$  и  $x_0$ ?
16. В каких случаях допустимо использовать приближенное равенство для переменных Эйлера и Лагранжа  $x(x_0, t) \approx x_0$ ?
17. В каких случаях использование равенства  $x(x_0, t) \approx x_0$  требует дополнительного анализа?
18. Запишите примеры неоднозначного преобразования к переменным Эйлера при однозначной записи закона движения в переменных Лагранжа.
19. Запишите примеры неоднозначного преобразования к переменным Лагранжа при однозначной записи закона движения в переменных Эйлера.
20. Запишите пример взаимнонеоднозначного преобразования закона движения.

## **1.2. Особенности отождествления деформаций, записанных в переменных Эйлера и Лагранжа**

### **1.2.1. Общие положения**

В механике деформируемых сред понятие о деформации исследуемого материального объема требует наличия объекта сравнения, выбор которого прежде всего обусловлен удобством и простотой последующих рассуждений. В качестве такого объекта обычно выбирают тот же материальный объем, но только в т. н. начальном, чаще всего недеформированном состоянии и сопоставляют между собой размеры и положения одних и тех же отрезков, принадлежащих объему, в различные моменты времени [1, стр. 61–90; 2, стр. 64–96; 4, стр. 31–70]. И даже при неизменном объекте сравнения и сущности самого понятия деформация ее представление в общем случае не может быть однозначным. Ниже приведены традиционные представления о понятии деформации, из которых неизбежно вытекает такая неоднозначность.

### **1.2.2. Координатный способ представления деформаций**

С целью обеспечения предельной простоты и прозрачности в дальнейших рассуждениях мы, в противоположность [1, 2, 3], и в дальнейшем будем анализировать процесс деформирования при изменении лишь одной пространственной переменной  $x = x(x_0, t)$ . Сопоставим между собой для этого простейшего случая (рис. 1.1) отрезки  $dx$  и  $dx_0$ , принадлежащие одному и тому же материальному объему, с неизменной массой в начальном  $d\bar{m}_0$  и конечном ( $d\bar{m} = d\bar{m}_0$ ) состояниях. Тогда относительную деформацию  $\varepsilon_l$ ,  $\varepsilon_i$  можно представить, например, такими двумя, совершенно равноправными, на первый взгляд, способами:

$$\varepsilon_l = \frac{dx - dx_0}{dx_0}, \quad \varepsilon_i = \frac{dx - dx_0}{dx}. \quad (1.2.1)$$

Следует сделать оговорку, что в общем случае при неоднородной деформации, т.е. зависящей от пространственной координаты, одинаковые по длине материальные отрезки  $dx$  были, очевидно, неодинаковыми в начальном состоянии  $dx_0$ . При этом особо подчеркнем, что в математическом отношении  $dx$  и  $dx_0$  означают

частные дифференциалы, соответствующие фиксированным моментам времени  $t$  и  $t_0$ . Тогда соотношение (1.2.1) можно записать и так:

$$\varepsilon_l = \frac{\partial x(x_0, t)}{\partial x_0} - 1, \quad \varepsilon_i = 1 - \frac{\partial x_0(x, t)}{\partial x}, \quad (1.2.2)$$

откуда следует, что для определения  $\varepsilon_l$  требуется зависимость  $x = x(x_0, t)$ , а для  $\varepsilon_i$  – зависимость  $x_0 = x_0(x, t)$ . Поэтому  $\varepsilon_l$  следует, очевидно, называть лагранжевой, а  $\varepsilon_i$  – эйлеровой деформацией.

### 1.2.3. Представление деформации через перемещение

Имея в виду, что перемещение материальной частицы  $u$  определяется согласно (1.1.3), после дифференцирования этой зависимости по  $x$  или по  $x_0$  имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 - \frac{\partial x_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_0} = \frac{\partial x}{\partial x_0} - 1, \quad u = u(x, x_0), \quad (1.2.3)$$

откуда после сопоставления с (1.2.2) следует, что

$$\varepsilon_l = \frac{\partial u}{\partial x_0}, \quad \varepsilon_i = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.2.4)$$

Нетрудно заметить, что из (1.2.1) – (1.2.3) вытекают такие функциональные зависимости между  $\varepsilon_i$  и  $\varepsilon_l$

$$\varepsilon_i = \frac{\varepsilon_l}{1 + \varepsilon_l}, \quad \varepsilon_l = \frac{\varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i}, \quad (1.2.5)$$

из которых следует, что в случаях, когда  $\varepsilon_{i,l} \ll 1$ , с достаточным основанием можно полагать возможность отождествления деформаций Эйлера и Лагранжа  $\varepsilon_i \approx \varepsilon_l$ .

### 1.2.4. Сомнительные особенности при записи деформаций

Зависимости (1.2.5) можно получить и другим путем. Так, действительно, используя правило дифференцирования сложной функции с учетом (1.2.2) и (1.2.3), имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_0} = \varepsilon_i (1 + \varepsilon_i) \Rightarrow \varepsilon_l = \varepsilon_i (1 + \varepsilon_i),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} = \varepsilon_i(1 - \varepsilon_i) \Rightarrow \varepsilon_i = \varepsilon_i(1 - \varepsilon_i), \quad u = u(x, x_0). \quad (1.2.6)$$

Это правило весьма наглядно проявляется в нашем случае и в процессе таких несложных операций с выражением (1.1.3)

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{\partial u}{\partial x_0} dx_0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_0} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dx_0} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x_0} \frac{dx_0}{dx}. \quad (1.2.7)$$

Однако необходимо помнить, что дифференцирование выражения  $u = x - x_0$  осуществляется только при фиксированном времени  $t$ , куда оно явно не входит и для нефиксированных одна относительно другой координатах  $x_0, x(x_0)$ . Поэтому такую процедуру фактически необходимо понимать, как вычисление полных производных функции  $u(x, x_0)$  по взаимозависимым переменным  $x(x_0)$  или  $x_0(x)$ . В противном случае при вычислении частной производной функции  $u(x, x_0) = x - x_0$  будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x_0} = \frac{\partial}{\partial x_0}(x - x_0) = -1.$$

В справедливости этих замечаний можно убедиться из приведенных ниже выражений  $du/dx$  и  $du/dx_0$ , записанных по формуле для полной производной функции  $u = u(x, x_0)$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x_0} \frac{dx_0}{dx} = 1 - \frac{dx_0}{dx}, \\ \frac{du}{dx_0} &= \frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dx_0} = -1 + \frac{dx}{dx_0}. \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

Если сравнить между собой (1.2.6) и (1.2.8), то нетрудно заметить, что при такой записи они противоречат друг другу, поскольку второй член в (1.2.8) совпадает с правой частью (1.2.6). Устранить упомянутое противоречие можно, только заменив в (1.2.6) частные производные на соответствующие полные производные по координатам:

$$\frac{du}{dx_0} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{dx_0}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{du}{dx_0} \frac{dx_0}{dx}, \quad u = u(x, x_0) \quad (1.2.6, a)$$

или же, полагая, что перемещение является функцией  $u(x_0, t)$  или  $u(x, t)$ .

Поэтому общеизвестными [1, 2] соотношениями (1.2.6) следует пользоваться с особой осторожностью, придавая им смысл (1.2.6, а), т. е. полагать, что перемещение  $u$  является функций двух взаимозависимых переменных  $x$  и  $x_0$  при фиксированном времени  $t$ . Пренебрежение этой деликатной особенностью при переходе к переменным  $x, t$  или  $x_0, t$  может привести к абсурдным результатам.

Таким образом, если деформация определяется как производная функций  $u(x, t)$  или  $u(x_0, t)$ , то, во избежание недоразумений, по-видимому, следует писать:

$$\varepsilon_i = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad \varepsilon_l = \frac{\partial u(x_0, t)}{\partial x_0}, \quad (1.2.4, \text{ а})$$

Если же  $u = u(x, x_0)$ , то запись, например, в статике должна быть такой:

$$\varepsilon_i = \frac{du(x, x_0)}{dx}, \quad \varepsilon_l = \frac{du(x, x_0)}{dx_0}, \quad (1.2.4, \text{ б})$$

Из аналогичных соображений, если  $x = x(x_0, t)$  или  $x_0 = x_0(x, t)$ , выражения (1.2.4, а) можно записать и так:

$$\varepsilon_i = 1 - \frac{\partial x_0(x, t)}{\partial x}, \quad \varepsilon_l = \frac{\partial x(x_0, t)}{\partial x_0} - 1. \quad (1.2.4, \text{ г})$$

Что же касается (1.2.4, б), то применительно к этому случаю запись деформации с помощью координат  $x$  и  $x_0$ , очевидно, должна быть такой:

$$\varepsilon_i = 1 - \frac{dx_0(x)}{dx}, \quad \varepsilon_l = \frac{dx(x_0)}{dx_0} - 1. \quad (1.2.4, \text{ д})$$

Повторное дифференцирование (1.2.4, г)

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x_0} = -\frac{\partial^2 x_0(x, t)}{\partial x_0 \partial x}, \quad \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial x} = \frac{\partial^2 x(x_0, t)}{\partial x \partial x_0} \quad (1.2.9)$$

позволяет подметить весьма неожиданную, на первый взгляд, особенность. Смешанные производные в (1.2.9) в случае возможности перестановки порядка дифференцирования должны быть равны нулю и тогда  $\partial \varepsilon_i / \partial x_0 = \partial \varepsilon_l / \partial x = 0$ . Однако такой результат находится в противоречии с приведенными ниже рассуждениями.

Подставим вместо  $\varepsilon_i$  и  $\varepsilon_l$  в (1.2.9) соответствующее выражение согласно (1.2.6) и выполним элементарные преобразования

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x_0} &= \frac{\partial}{\partial x_0} [\varepsilon_l (1 - \varepsilon_i)] = \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial x_0} (1 - \varepsilon_i) - \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x_0} \varepsilon_l, \\ \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} [\varepsilon_i (1 + \varepsilon_l)] = \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x} (1 + \varepsilon_l) + \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial x} \varepsilon_i.\end{aligned}\quad (1.2.10)$$

Нетрудно заметить, что членами, содержащими в качестве множителей  $\varepsilon_i$  и  $\varepsilon_l$ , можно пренебречь, и тогда

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x_0} \approx \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial x} \approx \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x}, \quad (1.2.11)$$

т. е. смешанные производные, согласно (1.2.9), в общем случае не равны нулю, а перестановка порядка дифференцирования, вероятно, недопустима.

### 1.2.5. Примеры к п.п. 1.1 и 1.2

**Пример 1.** Определить выражения для деформаций, если закон движения задан в виде (1.1.1) или (1.1.2). Сопоставить полученные зависимости с результатами дифференцирования функций  $u(x_0, t)$  или  $u(x, t)$  согласно (1.1.4).

После подстановки (1.1.1) или (1.1.2) в (1.2.4, г) имеем

$$\varepsilon_l = \frac{\partial x(x_0, t)}{\partial x_0} - 1 = \frac{1}{1 - A \cos \omega t} - 1 = \frac{A \cos \omega t}{1 - A \cos \omega t},$$

$$\varepsilon_i = 1 - \frac{\partial x_0(x, t)}{\partial x} = 1 - (1 - A \cos \omega t) = A \cos \omega t.$$

Если продифференцировать выражения для перемещений, заданных согласно (1.1.4), то получим

$$\varepsilon_l = \frac{\partial u(x_0, t)}{\partial x_0} = \frac{A \cos \omega t}{1 - A \cos \omega t}, \quad \varepsilon_i = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = A \cos \omega t.$$

Как и следовало ожидать, результаты, полученные по различным формулам, совпадают. Если к тому же учесть, что  $\varepsilon_i \ll 1$ , то сразу же

находим  $\varepsilon_i \approx \varepsilon_l \ll 1$ , т. е. при расчетах деформации Эйлера и Лагранжа можно отождествлять.

**Пример 2.** Проверить, при каких ограничениях для деформаций возможно отождествление переменных Эйлера и Лагранжа, заданных формулами (1.1.1) и (1.1.2).

Упомянутые формулы с учетом выражения для  $\partial u(x,t)/\partial t$  из предыдущего примера можно записать в таком виде:

$$x(x_0, t) = \frac{x_0}{1 - \partial u / \partial x}, \quad x_0(x, t) = x(1 - \partial u / \partial x).$$

Поскольку  $\partial u / \partial x \ll 1$ , то  $x \approx x_0$  и поэтому отождествление допустимо.

**Пример 3.** Проверить, при каких условиях можно отождествлять переменные Эйлера и Лагранжа, заданные такими зависимостями:

$$x(x_0, t) = \frac{x_0}{1 - A \sin \omega t} + a \sin \omega t \Rightarrow x_0(x, t) = (x - a \sin \omega t)(1 - A \sin \omega t).$$

Продифференцируем второе выражение по  $x$

$$\frac{\partial x_0}{\partial x} = 1 - A \sin \omega t \Rightarrow 1 - \frac{\partial x_0}{\partial x} = \varepsilon_i = A \sin \omega t$$

и подставим в первое

$$x(x_0, t) = \frac{x_0}{1 - \varepsilon_i} + a \sin \omega t \approx x_0 + a \sin \omega t.$$

Нетрудно заметить, что отождествление в этом случае допустимо только при условии

$$a \sin \omega t \ll (x - x_0),$$

которое означает, что отождествление переменных возможно, если малы не только деформации, но и перемещения тела в целом существенно меньше перемещений за счет деформаций.

Нетрудно заметить, что условие малости перемещений за счет деформаций при  $\varepsilon_i \ll 1$  выполняется автоматически. И действительно,

$$u(x_0, x) = x - x_0 = \frac{Ax_0 \sin \omega t}{1 - A \sin \omega t} + a \sin \omega t.$$

Поскольку  $\partial u / \partial x = A \sin \omega t$ , то требование малости перемещений, по-видимому, подразумевает, что  $u \ll x_0$ . Если начало координат связать с концом тела, то это требование можно сформулировать так: перемещения должны быть существенно меньше размеров самого тела. Таким образом мы пришли к общепринятому требованию классической теории упругости.

### 1.2.6. Контрольные вопросы

1. Какие параметры материального объема сопоставляются между собой при определении понятия относительной деформации?
2. Почему принятое определение относительной деформации не может быть однозначным?
3. Какая деформация и почему называется эйлеровой, а какая называется лагранжевой?
4. Запишите выражения для лагранжевой и эйлеровой деформаций, используя функцию перемещения  $u(x, x_0) = x - x_0$ .
5. Запишите выражения для лагранжевой и эйлеровой деформации, используя функцию перемещения  $u = u(x_0, t)$  и  $u = u(x, t)$ .
6. Запишите функциональные зависимости между деформациями Эйлера  $\varepsilon_i$  и Лагранжа  $\varepsilon_l$ , т. е.  $\varepsilon_i(\varepsilon_l)$  и  $\varepsilon_l(\varepsilon_i)$ , и покажите, при каком условии  $\varepsilon_i \approx \varepsilon_l$ .
7. Покажите, что зависимости  $\varepsilon_i(\varepsilon_l)$  и  $\varepsilon_l(\varepsilon_i)$  вытекают из правила дифференцирования сложной функции.
8. Почему выражения  $\partial u(x, x_0) / \partial x$  и  $\partial u(x, x_0) / \partial x_0$  в формулах (1.2.3) необходимо подразумевать как полные производные  $d$  по соответствующим координатам? Покажите, чему фактически равны частные производные по этим координатам.
9. Запишите выражения для полных производных  $du(x, x_0) / dx$  и  $du(x, x_0) / dx_0$  и получите окончательные зависимости с учетом фактических значений частных производных  $\partial u / \partial x$  и  $\partial u / \partial x_0$ .
10. Укажите на противоречия между записями (1.2.6) и (1.2.8).
11. В каком случае следует писать  $\varepsilon_l = \partial u / \partial x_0$  и в каком  $\varepsilon_l = du / dx_0$ ?
12. В каком случае следует писать  $\varepsilon_i = \partial u / \partial x$  и в каком  $\varepsilon_i = du / dx$ ?
13. Покажите, чему равны смешанные производные  $\partial^2 x / \partial x \partial x_0$ ,  $\partial^2 x_0 / \partial x_0 \partial x$ . В каком случае они равны нулю?

### **1.3. Особенности представления скоростей и ускорений в переменных Эйлера и Лагранжа**

#### **1.3.1. Представление скорости и ускорения в координатной форме**

Если известен закон движения материальной частицы  $x = x(x_0, t)$ , записанный в инерциальной системе координат, то, фиксируя начальную координату  $x_0$  и дифференцируя текущую  $x$  по времени  $t$ , получим выражения для скорости  $\dot{x}$  и ускорения  $\ddot{x}$

$$\dot{x} = \frac{\partial x(x_0, t)}{\partial t}, \quad \ddot{x} = \frac{\partial^2 x(x_0, t)}{\partial t^2}, \quad (1.3.1)$$

которые, очевидно, являются функциями переменных Лагранжа  $x_0, t$ .

Напомним, что систему координат называют инерциальной в тех случаях, когда эта система неподвижна или же когда ее скорость не изменяется во времени.

Таким образом, согласно (1.3.1), для определения скорости и ускорения необходимо записать закон движения в координатной форме через переменные Лагранжа и продифференцировать его по времени  $t$ , полагая  $x_0$  фиксированной величиной.

#### **1.3.2. Представление скорости и ускорения через перемещения**

Принимая во внимание, что, согласно (1.2.3), переменную  $x$  можно представить в виде  $x = u + x_0$ , выражения (1.3.1) после такой замены, с учетом, что  $\partial x_0 / \partial t = 0$ , запишем так:

$$\dot{x} = \dot{u} = \frac{\partial u(x, x_0)}{\partial t}, \quad \ddot{x} = \ddot{u} = \frac{\partial^2 u(x, x_0)}{\partial t^2}. \quad (1.3.2)$$

Однако эта общепринятая запись, как будет показано ниже, недостаточно корректна.

Поскольку, согласно (1.3.2) функцию двух переменных  $x, x_0$ , одна из которых является зависимой, требуется продифференцировать по независимой переменной  $t$ , то для этого достаточно осуществить подстановку  $x = x(x_0, t)$  и найти  $u = u(x_0, t)$ . Тогда из соотношения (1.3.2) получим

$$\dot{u} = \frac{\partial u(x_0, t)}{\partial t}, \quad \ddot{u} = \frac{\partial^2 u(x_0, t)}{\partial t^2}, \quad (1.3.3)$$

т. е. запись скорости и ускорения, как функции перемещения, в переменных Лагранжа.

Если же в соотношениях (1.3.2) зафиксировать переменную  $x$ , то после подстановки  $x_0 = x_0(x, t)$  перемещение  $u$  можно представить в виде  $u = u(x, t)$ . Учитывая, что, согласно (1.3.3), дифференцирование по времени  $t$  все же означает вычисление полной производной по этому аргументу, то по общепринятому соглашению [1, стр. 56; 2, стр. 39], необходимо писать:

$$\dot{u} = \frac{du(x, t)}{dt}, \quad \ddot{u} = \frac{d^2 u(x, t)}{dt^2} = \frac{d\dot{u}}{dt}. \quad (1.3.4)$$

Раскрывая выражения для полной производной в соотношениях (1.3.4), получим

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{u} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \frac{dx}{dt}, \quad u = u(x, t) \quad (1.3.4, a)$$

Принимая во внимание, что  $dx/dt = \dot{u}$ , соотношения (1.3.4, а) перепишем так:

$$\dot{u} = \frac{\partial u / \partial t}{1 - \partial u / \partial x}, \quad \ddot{u} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} + \dot{u} \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}, \quad u = u(x, t). \quad (1.3.5)$$

Из первого соотношения (1.3.5) вытекает, что  $\dot{u} \approx \partial u / \partial t$ , если  $\partial u / \partial x \ll 1$ . Однако эта очевидная формула в известных автору публикациях, не говоря уже об учебных пособиях, почему-то не встречается. Тем не менее, с учетом ее очевидности именно она скорее всего может натолкнуть и на неопровержимость записи приближенного равенства между полной и частной производными  $d^2 u(x, t) / dt^2 \approx \partial^2 u(x, t) / \partial t^2$ , если  $\partial u / \partial x \ll 1$ .

И действительно, кажущаяся очевидность этой записи настолько прочно закрепилась в университетских курсах теоретической механики [5, стр. 513] и механики сплошной среды [2, стр. 176], что в курсах математической физики [6], теории упругости [7], теории колебаний [8]

и др. запись ускорения в виде  $\partial^2 u / \partial t^2$  производится без каких-либо оговорок. В научных публикациях, за редкими исключениями, например [9, стр. 17], данный вопрос не обсуждается вообще, по-видимому потому, что, согласно устоявшемуся, общепринятому мнению [2, стр. 176; 10, стр. 23, 40 и др.], общие уравнения механики деформируемого твердого тела обычно записываются в переменных Лагранжа, и поэтому проблема с нелинейными членами согласно (1.3.3) якобы не возникает.

И тем не менее, мы все же запишем развернутое выражение для полной производной  $d^2 u(x, t) / dt^2$ . Его можно получить путем подстановки первого соотношения (1.3.5) во второе и последующего дифференцирования. После достаточно громоздких преобразований имеем

$$\ddot{u} = \frac{d^2 u(x, t)}{dt^2} = \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-1} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u / \partial t}{1 - \partial u / \partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{(\partial u / \partial t)^2}{(1 - \partial u / \partial x)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right). \quad (1.3.6)$$

При этом разумеется, что величинами  $\partial u / \partial x \ll 1$  в соотношении (1.3.6) можно пренебречь по сравнению с единицей (если в последующих преобразованиях не предстоит операция дифференцирования).

Развернутая запись выражений для скорости  $\dot{u}$  согласно (1.3.5) и для ускорения  $\ddot{u}$ , согласно (1.3.6), фактически подразумевает переход к переменным Эйлера, поскольку частная производная по одной из координат означает, что дифференцирование производится при фиксированной (не путать с независимой координатой!) второй координате.

### 1.3.3. Особые формы представления скорости и ускорения

Как мы уже видели в п. 1.1, закон движения можно записать и в явном виде относительно начальной координаты  $x_0 = x_0(x, t)$ . В этом случае, фиксируя  $x$  и изменяя  $t$ , можем определить характер изменения  $x_0$ , т. е. выяснить начальные положения (координаты) частиц, которые в момент времени  $t$  находятся в точке пространства с координатой  $x$ . При таком подходе производные  $\partial x_0(x, t) / \partial t$  и  $\partial^2 x_0(x, t) / \partial t^2$  приобретают определенный физический смысл, который легко установить, дифференцируя выражение для перемещения  $u = x - x_0$  при фиксированной координате  $x$

$$\frac{\partial u(x, x_0(x, t))}{\partial t} = -\frac{\partial x_0(x, t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 u(x, x_0(x, t))}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 x_0(x, t)}{\partial t^2}. \quad (1.3.7)$$

Следует помнить, что соотношения (1.3.7) справедливы только в том случае, когда указаны переменные в скобках. Если не учитывать это требование, то такие записи могут в конечном итоге привести к абсурдным результатам. И действительно, если зафиксировать координату  $x_0$ , то из выражения для перемещения  $u = x - x_0$  после дифференцирования вытекают совершенно другие, тоже справедливые, соотношения для частных производных от перемещения. Они имеют такой вид:

$$\frac{\partial u(x(x_0, t), x_0)}{\partial t} = \frac{\partial x(x_0, t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 u(x(x_0, t), x_0)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x(x_0, t)}{\partial t^2}. \quad (1.3.8)$$

Таким образом, соотношения (1.3.7) и (1.3.8) дают основание утверждать, что формула (1.3.2) может считаться корректной при обязательной оговорке, что фиксируется именно координата  $x_0$ . В противном случае, как следует из (1.3.7), формула (1.3.2) неверна, поскольку вместо символа частной производной  $\partial$  следует писать знак полной производной  $d$ .

Соотношения (1.3.5) и (1.3.6) можно записать и в другом виде в результате подстановки  $u = x - x_0$ . Считая  $x$  фиксированной переменной, из первой формулы (1.3.5) имеем

$$\dot{u}(x, t) = \frac{\partial u / \partial t}{1 - \partial u / \partial x} = -\frac{\partial x_0 / \partial t}{\partial x_0 / \partial x}. \quad (1.3.9)$$

Таким же способом получаем из (1.3.6) другое выражение для ускорения

$$\ddot{u}(x, t) = \left( \frac{\partial x_0}{\partial x} \right)^{-1} \left( -\frac{\partial^2 x_0}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial x_0 / \partial t}{\partial x_0 / \partial x} \frac{\partial^2 x_0}{\partial x \partial t} + \frac{(\partial x_0 / \partial t)^2}{(\partial x_0 / \partial x)^2} \frac{\partial^2 x_0}{\partial x^2} \right). \quad (1.3.10)$$

Следует отметить, что именно в таком виде, но выведенное более сложным путем, это соотношение имеется и в монографии [4, стр. 79]. В других, известных автору, научных публикациях и учебных пособиях эта непривычная формула не встречается.

Отмеченные в п.1.2. особенности преобразований (1.2.8), (1.2.4, а), (1.2.4, б) таким же образом проявляются и при работе с производными  $du/dt$ ,  $\partial u/\partial t$ . Так, если  $u = u(x, x_0)$ , то, очевидно, можно записать такое выражение:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_0} \frac{dx_0}{dt}. \quad (1.3.11)$$

Нетрудно заметить, что в нашем случае эта формула будет справедливой, если  $\partial u/\partial x = 1$ ,  $\partial u/\partial x_0 = -1$ ,  $dx_0/dt = 0$ . Тогда  $du/dt = dx/dt$ . Если же  $\partial u/\partial x$  рассматривать, как предусмотрено в (1.2.3), то формула (1.3.11) теряет смысл.

Представляет интерес и особенность, которую следует иметь в виду при записи выражения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial t}, \quad u = u(x, x_0). \quad (1.3.12)$$

Поскольку здесь координата  $x$  считается фиксированной, то  $\partial x/\partial t = 0$ ,  $\partial u/\partial x_0 = -1$  и поэтому  $\partial u/\partial t = -\partial x_0/\partial t$ , т. е. получим результат, совпадающий с (1.3.7). Если же запись  $\partial u/\partial x_0$  рассматривать в смысле соотношения (1.2.3), то результат окажется абсурдным, поскольку в этом случае частная производная  $\partial u/\partial x_0 \neq -1$ , а является малой величиной равной  $\varepsilon_l$ .

Оригинальный подход к выводу первого соотношения (1.3.7) предложен и в [4, стр. 78]. Автор [4] записывает выражение

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{\partial x_0}{\partial t} + \frac{\partial x_0}{\partial x} \frac{dx}{dt}. \quad (1.3.13)$$

Поскольку  $x_0 = x - u$  и  $dx/dt = du/dt$ , то  $dx_0/dt = 0$ , а второй член справа есть не что иное, как  $-\partial u/\partial t$ , т. к.  $\partial x_0/\partial x = 1 - \partial u/\partial x$ . Вычисляя затем полную производную правой части (1.3.13), автор [4] получил (1.3.10).

Иногда при постановке некоторых задач не удается задать неподвижную систему координат таким образом, чтобы начальные координаты фиксированных частиц не зависели от времени. Так приходится поступать, если деформируемое тело не закреплено или же его точки закрепления перемещаются с ускорениями. В таких случаях большинство формул, приведенных в п.п. 1.3.2 и 1.3.3, теряют силу.

### 1.3.4. Примеры

**Пример 1.** Определить и записать зависимости между частными производными по времени  $t$  от выражений для  $x(x_0, t)$  и  $u(x, t)$ , заданных согласно (1.1.1) и (1.1.4).

Дифференцируя (1.1.1), имеем

$$\frac{\partial x(x_0, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{x_0}{1 - A \cos \omega t} \right) = - \frac{x_0 A \omega \sin \omega t}{(1 - A \cos \omega t)^2} = f(x_0, t).$$

Если теперь  $x_0$  выразить через  $x$  согласно (1.1.1), то получим такое соотношение

$$\frac{\partial x(x_0, t)}{\partial t} = - \frac{x A \omega \sin \omega t}{1 - A \cos \omega t} = \bar{f}(x, t).$$

Однако при такой записи, вместо частной производной, очевидно, следует писать полную производную  $dx/dt$ , поскольку это соотношение теперь представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dx}{dt} + \psi(t)x = 0.$$

Решением такого уравнения, очевидно, является функция (1.1.1).

Из этого примера вытекает, что при известном поле скоростей в переменных Эйлера переход к переменным Лагранжа требует решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Если принять во внимание, что, согласно (1.1.4),

$$A \cos \omega t = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad -A \omega x \sin \omega t = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t},$$

то окончательно получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial u(x, t) / \partial t}{1 - \partial u / \partial x}.$$

Согласно (1.3.5), правая часть этого соотношения равна  $du(x, t) / dt$ . Проверим это, вычисляя полную производную от второго выражения (1.1.4)

$$\frac{du(x, t)}{dt} = -A \omega x \sin \omega t + A \frac{dx}{dt} \cos \omega t,$$

Поскольку  $dx/dt = du(x,t) / dt$ , то после переноса последнего члена в левую часть получим

$$\frac{du(x,t)}{dt}(1 - A \cos \omega t) = -Ax\omega \sin \omega t$$

или окончательно

$$\frac{du(x,t)}{dt} \left( 1 - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

т. е. пришли к тому же результату.

Нетрудно убедиться, что именно такое выражение получим, вычисляя частную производную от первого соотношения (1.1.4).

**Пример 2.** Установить физический смысл выражения для  $\partial x_0(x,t) / \partial t$  согласно (1.1.2).

Продифференцируем по  $t$  соотношение (1.1.2) и сравним полученный результат с выражением для  $\partial u(x,t) / \partial t$  из предыдущего примера.

Тогда

$$\frac{\partial x_0(x,t)}{\partial t} = xA\omega \sin \omega t = -\frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

и поэтому производная  $\partial x_0(x,t) / \partial t$  характеризует скорость изменения начальной координаты при сопоставлении скоростей материальных частиц, находящихся в точке пространства с координатой  $x$  в моменты времени  $t$  и  $t + dt$ .

**Пример 3.** Определить полную производную  $dx_0(x,t) / dt$  применительно к (1.1.2).

Дифференцируя (1.1.2), имеем

$$\begin{aligned} \frac{dx_0(x,t)}{dt} &= \frac{d}{dt}(x - xA \cos \omega t) = \frac{dx}{dt} + xA\omega \sin \omega t - \\ &- \frac{dx}{dt} A \cos \omega t = \frac{dx}{dt}(1 - A \cos \omega t) + xA\omega \sin \omega t. \end{aligned}$$

Поскольку, согласно первому примеру,

$$\frac{dx}{dt}(1 - A \cos \omega t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad xA\omega \sin \omega t = -\frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

то в конечном итоге приходим к очевидному результату  $dx_0(x,t)/dt = 0$ , из которого вытекает, что и полная вторая производная от начальной координаты по времени тоже равна нулю  $d^2x_0(x,t)/dt^2 = 0$ .

### 1.3.5. Контрольные вопросы

1. Запишите общие выражения для скорости и ускорения в переменных Лагранжа без использования функции перемещения. Приведите пример.
2. Запишите общие выражения для скорости и ускорения в переменных Эйлера без использования функции перемещения. Приведите пример.
3. Как записывается выражение для скорости в переменных Эйлера с использованием функции перемещения?
4. Показать, при каких условиях  $\partial u(x,t)/\partial t \approx du(x,t)/dt$ .
5. Запишите в переменных Эйлера выражение для ускорения с использованием функции перемещения. Какими величинами в этом выражении можно пренебречь?
6. Сформулируйте физический смысл частных производных  $\partial x_0(x,t)/\partial t$  и  $\partial^2 x_0(x,t)/\partial t^2$  и покажите, чему они равны.
7. Запишите развернутое выражение для скорости в переменных Эйлера, используя только символы  $x, x_0, t$ .
8. Запишите развернутое выражение для ускорения в переменных Эйлера, используя только символы  $x, x_0, t$ .
9. Укажите на противоречия, содержащиеся в общем-то правильной формуле

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_0} \frac{dx_0}{dt}, \quad u = u(x, x_0).$$

В каком смысле следует понимать  $\partial u/\partial x$  и  $\partial u/\partial x_0$ ?

10. Укажите на противоречие в общем-то правильной формуле

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t}, \quad u = u(x, x_0).$$

11. Покажите на конкретном примере, что  $\partial x_0/\partial t \neq 0$ , а  $dx_0/dt = 0$ .
12. Покажите, какие известные соотношения можно получить из развернутого выражения для полной производной от начальной координаты по времени

$$\frac{dx_0(x,t)}{dt} = \frac{\partial x_0}{\partial t} + \frac{\partial x_0}{\partial x} \frac{dx}{dt} = 0.$$

13. Расскажите об аналогии при записи производных  $du/dx$ ,  $du/dx_0$  и  $du/dt$ , а также  $\partial u/\partial x$ ,  $\partial u/\partial x_0$  и  $\partial u/\partial t$ .

## **1.4. Парадоксальные особенности вывода уравнений движения**

### **1.4.1. Общие положения**

Подходы к описанию движения сплошной среды, именуемые как «лагранжево и эйлерово представление» [1, стр. 54], по общему признанию [1, 2, 4] совершенно равноправны, поскольку позволяют, хотя и не всегда простым путем, перейти от одних переменных  $x$  к другим  $x_0$ . Кроме того, в случае малых перемещений и деформаций, простота перехода обеспечивается следствием  $x \approx x_0$ , которое формально устраняет, а точнее, вуалирует упомянутую в п. 1.1. возможную неоднозначность такой процедуры. Однако почему-то остался вне поля зрения тот факт, что все сказанное выше и в п. 1.1 относится к ситуации, когда известен закон движения, записанный в той или иной системе координат, т. е. в виде  $x = x(x_0, t)$  или  $x_0 = x(x_0, t)$ . Если же закон движения по условию задачи, как это обычно и бывает, является искомой функцией, причем входящей под оператор дифференцирования, то упомянутый переход может оказаться не таким простым, как принято считать.

### **1.4.2. Противоречия вывода уравнений движения в переменных Лагранжа**

Вывод уравнений движения в большинстве случаев основан на использовании принципа Даламбера применительно к бесконечно малому материальному объему сплошной среды в виде прямоугольного параллелепипеда. При этом получение замкнутых уравнений всегда связано с необходимостью их записи в перемещениях  $u$  из-за наличия в них ускорения, являющегося функцией  $u$ . И поскольку ускорение в переменных Лагранжа  $x_0, t$ , как следует из сравнения (1.3.3) и (1.3.6), записывается значительно проще, то и намерение отдать предпочтение именно лагранжевой

системе координат выглядит вполне закономерным. Если к тому же учесть, что обе системы координат, и даже деформации  $\varepsilon_i$  и  $\varepsilon_l$ , при определенных условиях можно отождествлять, то общепринятое [1, 7, 10, 11, 14], причем безоговорочное, предпочтение именно лагранжевым переменным в механике деформируемого твердого тела выглядит, на первый взгляд, совершенно бесспорным. В этой связи искомой функцией считается  $u(x_0, t)$ . Тогда деформация записывается в виде  $\partial u(x_0, t)/\partial x_0$ , ускорение  $\partial^2 u(x_0, t)/\partial t^2$ , а линейный закон упругости применительно к рис. 1.1 выглядит так:

$$Q(x_0, t) = ES \frac{\partial u(x_0, t)}{\partial x_0}. \quad (1.4.1)$$

Однако, если быть последовательным, то можно заметить существенное неудобство, связанное с тем, что напряженное состояние материального объема в виде реакций  $Q$  и  $Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx$  возникает, не в начальном его состоянии, а спустя некоторое время, т. е. в текущем или, как часто его называют, в актуальном состоянии [2]. Поэтому реакцию  $Q$  и внешнюю нагрузку  $F$  все же приходится связывать не с начальным  $x_0$ , а с текущими координатами  $x$  и писать  $Q(x, t)$ ,  $F(x, t)$ , а не  $Q(x_0, t)$ ,  $F(x_0, t)$ . В таком случае уравнение движения мы вынуждены по сути дела записать в некорректном виде

$$\frac{\partial^2 u(x_0, t)}{\partial t^2} \rho S dx = \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} + F(x, t) dx, \quad (1.4.2)$$

поскольку переменные справа  $x, t$  не соответствуют переменным слева  $x_0, t$ .

Однако, при выводе уравнений движения переменные при искомым функциях писать обычно [7, 11] не принято. Поэтому, не заметив безоговорочной подмены подвижной нагрузки  $Q(x, t)$  на неподвижную  $Q(x_0, t)$ , можно подставить (1.4.1) в (1.4.2) и в результате получить

$$\frac{\partial^2 u(x_0, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x_0, t)}{\partial x \partial x_0} + F(x, t), \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (1.4.3)$$

Что же касается внешней нагрузки  $F(x, t)$ , которая тоже является подвижной, то, принимая во внимание условие  $x \approx x_0$ , ее также приводят к неподвижной, полагая

$$F(x,t) \approx F(x_0,t), \quad (1.4.4)$$

и тогда простейшее уравнение движения – волновое в переменных Лагранжа принимает общеизвестную [6, 8, 11] форму

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + F, \quad u = u(x_0, t). \quad (1.4.5)$$

Таким образом, достаточно корректное приближение  $x \approx x_0$ , но использованное под знаком дифференцирования, привело к весьма сомнительному, как будет показано ниже, переходу. Однако, подобного рода сомнения и оговорки в научных публикациях, и особенно в учебной литературе, почему-то не излагаются, а запись (1.4.5) считается вполне корректной, поскольку ее погрешность при  $x \approx x_0$  якобы не превышает малых первого порядка, т. е. она соизмерима с  $\partial u / \partial x_0 \ll 1$ .

### 1.4.3. Особенности вывода уравнений движения в переменных Эйлера

Существует, правда, и другой, вполне корректный подход, согласно которому искомой функцией считается  $u(x, t)$ , но уравнение движения в этом случае с учетом (1.3.5) получается более сложным

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial t} + \dot{u} \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F, \quad u = u(x, t), \quad \dot{u} = \frac{du}{dt}. \quad (1.4.6)$$

Запись уравнения движения в виде (1.4.6) фактически означает лишь частичный переход к фиксированным координатам, т. е. к переменным Эйлера  $x, t$ , хотя частная производная функции  $u(x(x_0, t), t)$ , например по переменной  $x$  означает, что дифференцирование производится при фиксированном времени  $t$ . Для полного перехода к переменным Эйлера необходимо замкнуть (1.4.6), т. е. расписать выражение для полной производной  $du/dt$  и подставить в уравнение. Если же после замыкания запись волнового уравнения оставить в виде

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F, \quad u = u(x, t), \quad (1.4.6, a)$$

то, хотя при дифференцировании функции  $u(x, t)$  по  $x$  переменная  $t$  считается фиксированной, производная  $d^2 u / dt^2$  определяется с учетом, что  $x = x(x_0, t)$  т. е. координата  $x$  не считается фиксированной. Сказанное

означает, что в случае, когда мы хотим проверить является ли функция  $u(x,t)$  решением уравнения (1.4.6) и, разумеется, (1.4.6, а), то при подстановке в первое из них зависимость  $x = x(x_0, t)$  фактически не принимается во внимание ( $x$  фиксируется), а при подстановке во второе уравнение этого делать нельзя, т.к. следует брать полную производную по  $t$  от функции  $u(x, t)$ .

Как видим, запись (1.4.6, а) формально ничем не отличается от (1.4.5). И  $d^2u/dt^2$  в (1.4.6, а), и  $\partial^2u/\partial t^2$  в (1.4.5) означают полную производную по времени  $t$ , но в первом случае от функции  $u(x,t)$ , а во втором от  $u(x_0, t)$ . И к тому же, казалось бы, вполне обоснованная замена  $x$  на  $x_0$  превращает нелинейное уравнение (1.4.6, а) в линейное (1.4.5). Поэтому представляется оправданной, на первый взгляд, и допустимостью замены  $d^2u/dt^2$  на  $\partial^2u/\partial t^2$  в (1.4.6, а).

Такого рода подход содержится в некоторых университетских курсах по теоретической механике [5, стр. 511-513] и механике сплошной среды [2, стр. 174–176]. Однако, в учебной литературе по механике деформируемого твердого тела этот подход широкого распространения не получил в связи с общепринятой точкой зрения о малости нелинейных составляющих вообще в случае малых перемещений и деформаций [5, стр. 513 и др.]. К такому выводу действительно очень легко склониться, если учесть, что без нелинейного члена (1.4.6) фактически превращается в (1.4.5), запись левой части которого, как мы уже знаем из п. 1.3, сама по себе является точной. К тому же, согласно (1.3.5) с достаточной точностью можно полагать, что  $\partial u/\partial t \approx du/dt$  и поэтому, на первый взгляд, по поводу предположения  $\partial^2u/\partial t^2 \approx d^2u/dt^2$  не может быть никаких сомнений. Однако, с другой стороны, даже поверхностный анализ (1.4.6) приводит все-таки к обоснованным сомнениям, поскольку о малости нелинейного члена  $\dot{u}\partial\dot{u}/\partial x$  можно говорить только в том случае, когда оба сомножителя конечны и хотя бы один из них достаточно мал. Уместно в этой связи заметить, что безоговорочная запись вместо обычно называемой субстанциональной (индивидуальной, полной [1, стр. 59; 2, стр. 36]) производной  $d^2u/dt^2$ , выражения  $\partial^2u/\partial t^2$  в гидромеханике означала бы потерю для науки знаменитого уравнения Бернулли.

#### 1.4.4. Оценка весомости нелинейных членов

С целью определения действительной погрешности при записи  $\partial^2 u / \partial t^2$  вместо  $d^2 u / dt^2$  воспользуемся известным представлением Даламбера [6, 2, 13]

$$u = \varphi(x - at) + \psi(x + at) \quad (1.4.7)$$

для общего решения одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.4.6, б)$$

Подставим (1.4.7) в нелинейное уравнение (1.4.6, а) и таким образом попытаемся определить, при наличии каких условий это выражение может быть и решением данного уравнения. Для наглядности не будем пользоваться развернутой записью (1.4.6), а непосредственно дважды продифференцируем (1.4.7) по  $x$  и  $t$ , но имея в виду, что в таком случае по  $t$  необходимо вычислять полную производную и считать  $x$  зависимой переменной, т. е.  $x = (x_0, t)$ ,

$$\frac{du}{dt} = \left( \frac{dx}{dt} - a \right) \varphi' + \left( \frac{dx}{dt} + a \right) \psi', \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a(\psi' - \varphi'),$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \left( \frac{dx}{dt} - a \right)^2 \varphi'' + \left( \frac{dx}{dt} + a \right)^2 \psi'' + (\varphi' + \psi') \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 (\psi'' + \varphi''),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (\varphi' + \psi'), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi'' + \psi''. \quad (1.4.8)$$

Следует помнить, что производные  $\varphi', \psi', \varphi'', \psi''$  означают дифференцирование по сложному аргументу  $x - at$  или  $x + at$  соответствующих функций  $\varphi$  или  $\psi$ .

Имея в виду, что  $du / dt = dx / dt$ ,  $d^2 u / dt^2 = d^2 x / dt^2$  и принимая во внимание выражение для  $\partial u / \partial x$  в последней строке (1.4.8), преобразуем соотношения первой и второй строк

$$\frac{du}{dt} [1 - (\psi' + \varphi')] = a(\psi' - \varphi') \Rightarrow \left( 1 - \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \dot{u} \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left(\frac{du}{dt} - a\right)^2 \varphi'' + \left(\frac{du}{dt} + a\right)^2 \psi'' . \quad (1.4.9)$$

Таким образом, первая формула (1.4.9) фактически совпала с полученной другим, более общим, способом формулой (1.3.4) и вместе с (1.3.5) отчетливо подтверждает, что только при условии  $\partial u / \partial x \gg 1$ ,  $du / dt \ll a$  можно полагать справедливость приближенного соотношения

$$\frac{d^2u}{dt^2} \approx a^2 (\varphi'' + \psi'') = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} . \quad (1.4.9, a)$$

Тогда общее решение нелинейного однородного волнового уравнения (1.4.6, а) в ряде случаев действительно может быть представлено в виде (1.4.7). Наряду с этим из первой формулы (1.4.8) также следует, что для предположения  $du / dt \approx \partial u / \partial t$ , но применительно к волновому уравнению, требуется соблюдать не только условие  $\partial u / \partial x \gg 1$ , но и требование  $dx / dt \ll a$ .

Попробуем теперь дать более строгую количественную оценку требованию  $\dot{u} \ll a$ . С этой целью, имея в виду выражение  $\partial^2 u / \partial t^2 = a^2 (\psi'' + \varphi'')$ , преобразуем правую часть второй формулы (1.4.9), а именно:

$$\frac{d^2u}{dt^2} \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dot{u}^2 (\varphi'' + \psi'') + 2a\dot{u} (\psi'' - \varphi'') . \quad (1.4.9, б)$$

Определим весомость двух нелинейных членов по сравнению с  $\partial^2 u / \partial t^2$  и запишем отношение нелинейной части к линейной

$$\delta = \frac{\dot{u}^2 (\psi'' + \varphi'') + 2a\dot{u} (\psi'' - \varphi'')}{a^2 (\psi'' + \varphi'')} = \frac{\dot{u}^2}{a^2} + 2 \frac{\dot{u}}{a} \frac{\psi'' - \varphi''}{\psi'' + \varphi''} . \quad (1.4.10)$$

Легко заметить, что с учетом выражений для  $\partial u^2 / \partial x^2$  и  $\partial u / \partial t$  согласно (1.4.8) соотношение (1.4.9, б) превращается в (1.3.6), которое получено хотя и более общим, но и более сложным путем.

Если  $\dot{u} / a \ll 1$  то первым членом в (1.4.10) можно пренебречь и тогда

$$\delta = 2 \frac{\dot{u}}{a} \frac{\psi'' - \varphi''}{\psi'' + \varphi''} . \quad (1.4.10, a)$$

При одностороннем распространении упругой волны решение (1.4.7), как известно [13, стр. 393], можно представить в виде  $u = \bar{\phi}(x \pm at)$ . Если при таком представлении решения сопоставить выражения для частных производных  $\partial u / \partial t$  и  $\partial u / \partial x$ , то получим обязательное ограничение величины скорости

$$\dot{u} = \pm a \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1.4.10, б)$$

и поэтому согласно (1.4.10) имеем  $\delta = 2\dot{u} / a = \pm 2\partial u / \partial x$ .

Такой подход позволяет произвести достаточно корректную оценку отброшенной нелинейной составляющей после получения решения линейного однородного волнового уравнения. Однако подобная оценка погрешности уравнения еще не означает, что она адекватна погрешности самого решения. Определение такой погрешности с достаточной достоверностью возможно, если известно какое-нибудь решение нелинейного уравнения.

Из соотношения (1.4.10, б) также вытекает чрезвычайно важное следствие, которое состоит в следующем. Общее решение  $u = \pm \bar{\phi}(x_0 \pm at)$  удовлетворяет волновому уравнению (1.4.5), записанному в переменных Лагранжа при  $F = 0$ , когда конвективная составляющая отсутствует. Для этого случая (1.4.10, б) тоже остается в силе, если положить  $x = x_0$ , что фактически означает  $\dot{u} / a = \pm \partial u / \partial x_0$ . Поэтому при постановке задач для линейного волнового уравнения следует иметь в виду, что получаемые решения справедливы, если величина  $\dot{u} / a$  такого же порядка как и  $\partial u / \partial x \ll 1$ .

Нелинейное уравнение (1.4.6, а) с учетом (1.3.6) после исключения в выражениях  $1 - \partial u / \partial x$  второго члена легко приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - a^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F, \quad (1.4.11)$$

а затем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} (M^2) + (M^2 - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = F, \quad M = \frac{\partial u / \partial t}{a}, \quad (1.4.12)$$

где  $M$  – число Маха, поскольку согласно (1.3.5)  $\partial u / \partial t \approx \dot{u}$  (хотя при последующем дифференцировании это приближение использовать недопустимо!).

Преобразование (1.4.6, а) в (1.4.11), (1.4.12) фактически подразумевает переход от подвижных координат к фиксированным, т. е. по сути к переменным Эйлера, поскольку частные производные в (1.4.11) по одной из переменных означают, что дифференцирование производится при фиксированной второй переменной.

#### 1.4.5. Противоречия вывода классического уравнения колебаний струны

Выводом знаменитого уравнения колебаний струны (1.4.13) занимались еще Б. Тейлор и И. Бернулли, но записать его в современной общеизвестной форме удалось только в 1747 г. Даламберу, а через год – Эйлеру. С тех пор это уравнение, вошедшее в обиход под названием волнового, заняло прочное место в учебниках по математике, математической физике, теории колебаний, а также других математических дисциплин и по сути стало считаться классическим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \bar{a}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \bar{a}^2 = \frac{T_n}{\bar{\rho}}, \quad (1.4.13)$$

где  $T_n$  – начальное натяжение струны;  $\bar{\rho}$  – погонная плотность.

При этом сформировалась и закрепились в учебниках общепринятая точка зрения, что волновое уравнение с необходимой точностью описывает процесс одномерных колебаний струны при достаточно малых ее отклонениях от положения равновесия. Предположение о малых отклонениях и, разумеется, углах отклонения к тому же почему-то стали считать достаточным условием установления практически не зависящего ни от времени, ни от координат натяжения струны [6]. Любопытно, что никого не насторожил очевидный факт отсутствия возможности описать с помощью этого уравнения колебания струны без ощутимого начального натяжения, когда  $T_n = 0$ . Осталось почему-то незамеченным и то, что малые отклонения могут вызвать такие натяжения струны, которые окажутся соизмеримыми с ее начальным натяжением. В таком случае предположение о неизменном натяжении

струны окажется ошибочным, а уравнение ее колебаний, по-видимому, должно быть иным.

Рассмотрим достаточно малый элемент  $dl$  отклоненной от состояния равновесия струны (рис. 1.2). Будем полагать, что указанный элемент находится под действием сил инерции  $\bar{I} = -I$ , сил натяжения  $T$ , сил тяжести  $G$  и, возможно, каких-либо других, распределенных по длине струны, объемных сил  $q$ .

Будем полагать, что струна совершает только одномерные колебания вдоль оси  $y$  и поэтому

$$dI = \bar{\rho} dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad u = u(x, t), \quad (1.4.14)$$

где  $u = y$  – отклонение материальной точки струны от состояния покоя.

Сила натяжения струны  $T = T_n + T_0$  состоит из двух частей, а именно: постоянной силы  $T_n$  начального натяжения и переменной силы  $T_0$ , возникающей за счет отклонения.

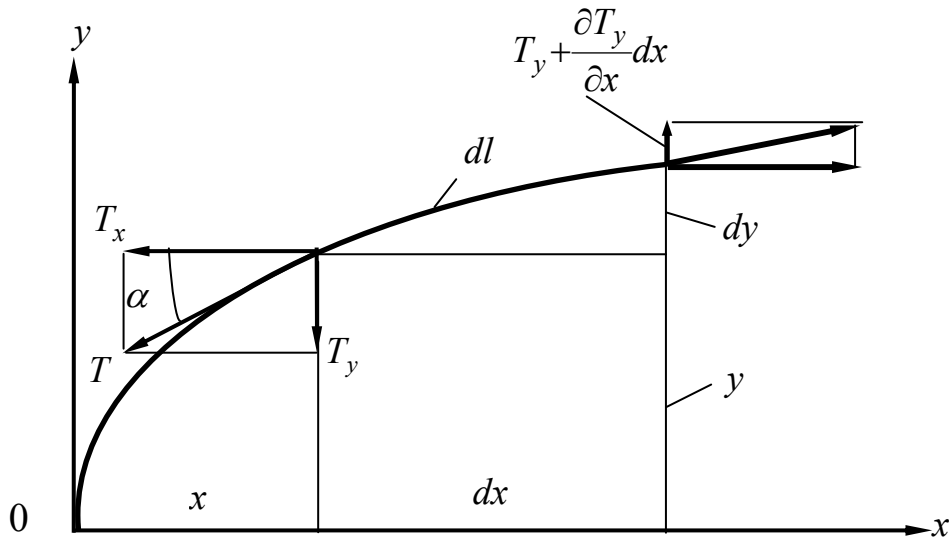


Рис. 1.2. К выводу уравнения колебаний струны

Если струна изготовлена из идеально упругого вещества, то

$$T_0 = E\varepsilon S, \quad (1.4.15)$$

где  $\varepsilon$  – продольная деформация (относительное удлинение) за счет отклонения струны.

Продольную деформацию можно определить двумя способами, а именно:

$$\varepsilon_L = \frac{dl - dx}{dx}, \quad \varepsilon_E = \frac{dl - dx}{dl}. \quad (1.4.16)$$

Имея в виду, что согласно рис. 1.2

$$dl = \frac{dx}{\cos \alpha}, \quad dx = dy \operatorname{ctg} \alpha,$$

из (1.4.16) соответственно имеем

$$\varepsilon_E = 1 - \cos \alpha, \quad \varepsilon_L = \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}. \quad (1.4.17)$$

В случае малых отклонений струны принято полагать, что малым будет и угол отклонения, и поэтому оба определения деформации практически совпадают, т.е.

$$\varepsilon_E = \varepsilon_L = 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha^2}{2}. \quad (1.4.18)$$

Таким образом, согласно (1.4.15) и рис. 1.2

$$T = T_n + SE \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow T_y = T \sin \alpha \approx T_n \alpha + SE \frac{\alpha^3}{2}, \quad (1.4.19)$$

и поэтому

$$dT_y = \frac{\partial T_y}{\partial x} dx = \left( T_n + \frac{3ES}{2} \alpha^2 \right) \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx. \quad (1.4.20)$$

При малых углах отклонения имеют место такие общепринятые приближения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$$

и тогда из уравнения (1.4.20) имеем

$$dT_y = \left( T_n + \frac{3ES}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx. \quad (1.4.21)$$

В соответствии с принципом Даламбера

$$dI = dT_y + Gdx + qdx,$$

$$\bar{\rho} dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left( T_n + \frac{3ES}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + Gdx + qdx, \quad (1.4.22)$$

откуда следует

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left( \bar{a}^2 + \bar{c}^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t), \quad (1.4.23)$$

$$\bar{a}^2 = \frac{T_n}{\bar{\rho}}, \quad \bar{c}^2 = \frac{3}{2} a^2, \quad a^2 = \frac{E}{\rho}, \quad \rho = \frac{\bar{\rho}}{S},$$

где  $\rho$  – действительная плотность вещества струны.

Из (1.4.23) вытекает, что в случае малого начального натяжения струны можно положить  $\bar{a} \approx 0$ . Если же выполняется условие  $T_n \gg T_0$ ,  $\alpha^2(x, t) \approx 0$ , то лишь в этом случае уравнение колебаний струны приобретает общеизвестный вид (1.4.13).

#### 1.4.6. Общие выводы

Таким образом, достаточно распространенная или даже общепринятая точка зрения [2, стр. 176; 10, стр. 23, 40], что уравнения механики деформируемого твердого тела могут быть изначально записаны с точностью до малых первого порядка в лагранжевой системе  $x_0, t$  не соответствует действительности и требует пересмотра. Как вытекает из рассмотренного выше, уравнение (1.4.6, а) фактически записано, причем корректно, в особой системе координат, когда правая его часть определяется при фиксированной временной координате  $t$ , а левая – с учетом изменения зависимой переменной  $x = x(x_0, t)$ . Переход к переменным Лагранжа  $x_0, t$ , а если говорить точнее, то общепринятая безоговорочная запись уравнений фактически производится путем некорректной повсеместной подмены подвижных координат  $x$  на неподвижные  $x_0$  без учета допустимости приближенного равенства

$x \approx x_0$  в конкретных условиях. Переход же к переменным Эйлера происходит автоматически путем раскрытия выражения для полной производной  $d^2u/dt^2$ , в результате чего подвижная координата  $x(x_0, t)$  становится фиксированной. При этом следует обратить особое внимание на отличие фиксированных координат  $x$  от неподвижных  $x_0$ . Фиксированные координаты можно рассматривать, как координаты неподвижных точек пространства, совпадающих с координатами подвижных материальных частиц. Однако, при определении частной производной  $\partial u(x(x_0, t), t)/\partial t$  зависимость  $x(x_0, t)$  попросту не учитывается, т. е.  $x$  фиксируется точно так же, как и время  $t$  считается неизменным при определении частной производной  $\partial u(x, t)/\partial x$ . Эти замечательные особенности эйлеровых переменных  $x, t$  создают возможность представить процесс деформирования в фиксированной системе координат, т.е. наблюдать за поведением подвижных частиц в неподвижных точках пространства.

Безоговорочная запись уравнений движения в лагранжевых переменных в классических трудах наших выдающихся предшественников [11, стр. 30, и др.], по видимому, и привела к тому, что в современных университетских курсах по механике деформируемого твердого тела [14] она стала безальтернативной и поэтому переменные Эйлера даже не упоминаются.

Насколько осторожно следует относиться к отождествлению переменных Эйлера и Лагранжа свидетельствует такая, казалось бы, вполне допустимая процедура: если в (1.4.6, а) произвести замену  $x$  на  $x_0$  то сразу же из нелинейного уравнения получим линейное (1.4.5), и наоборот – замена  $x_0$  на  $x$  в (1.4.5) приводит к существенному усложнению в виде нелинейного уравнения. Поэтому, если исходить из рассмотренной в п. 1 допустимости отождествления переменных Эйлера и Лагранжа, то это не означает автоматическое появление такой же возможности для дифференцируемых величин и особенно для производных по времени  $t$ . Именно эта весьма существенная особенность, обычно выпадает из поля зрения и, несмотря на всю ее очевидность, не учитывается при записи основных уравнений в переменных Лагранжа [1, 7, 11 и др.]. В конечном итоге это и привело к устойчивому заблуждению, что в теории малых деформаций среды «метод Лагранжа приводит к весьма простым и наглядным

результатам» [1, стр. 57] в виде линейных уравнений движения. На самом же деле сомнительная простота связана с подменой дифференцирования по подвижной координате  $x$  дифференцированием по не зависящей от времени координате  $x_0$ .

Исходя из условия  $x \approx x_0$  и имея в виду, что фиксированные в (1.1.11) координаты  $x$  фактически соответствуют неподвижным координатам пространства, напрашивается вывод о совпадении по форме уравнений движения в эйлеровых и лагранжевых переменных после замены  $x$  на  $x_0$  в (1.4.11). Однако, такая замена сама по себе бессмысленна, поскольку символы  $x_0$  в этом случае означают не истинные начальные координаты материальных частиц, находящихся в момент времени  $t$  в точках пространства с координатами  $x$ , а какие-то близкие к ним координаты других материальных частиц, которые тоже следует считать подвижными. Действительные начальные координаты следует, очевидно, определять по формуле  $x_0 = x - u$  после решения уравнения (1.4.11).

Вне всяких сомнений, что нелинейные члены в (1.4.12) могут быть опущены при условии  $M^2 \ll 1$ ,  $\partial(M^2)/\partial x \ll \partial^2 u / \partial x^2$ . Однако, когда только  $M^2 \ll 1$ , а  $\partial^2 u / \partial t^2 \approx 0$ , то нелинейный член становится определяющим и переход к линейному уравнению недопустим.

При опускании нелинейных членов особое внимание следует обратить на то, что они должны быть малыми по сравнению с наименьшим членом, который остается в уравнении. Поэтому оценивать весомость нелинейных членов по отношению к  $\partial^2 u / \partial t^2$  можно только в однородном уравнении (1.4.6, б). Что касается неоднородного уравнения, когда  $F \neq 0$ , то такое же сопоставление может оказаться ошибочным.

Таким образом, недоразумения, связанные с кажущейся корректностью записи (1.4.5), обусловлены необоснованной, безоговорочной заменой подвижных координат  $x$  неподвижными  $x_0$  с вытекающими отсюда последствиями, когда полная производная по времени в результате трудноуловимых манипуляций превращается в частную, создавая обманчивую видимость простоты записи уравнений движения в лагранжевых переменных.

Как вытекает из п. 1.4.5, традиционное линейное уравнение колебаний струны тоже имеет более ограниченную, чем принято считать, область применения. Малый угол отклонения является лишь

необходимым условием применимости уравнения. Но только при большом предварительном натяжении это условие оказывается достаточным. В противном случае уравнение колебаний струны становится нелинейным. Решение такого уравнения представляет собой самостоятельную проблему.

### 1.4.7. Примеры

**Пример 1.** Определить в соответствии (1.4.3) характер внешней нагрузки  $F = (x, t)$ , которая обеспечивает заданный в переменных Лагранжа закон движения материальных частиц в таком виде

$$u(x_0, t) = A \cos \frac{\omega}{a} x_0 \cos \omega t.$$

Подставим выражение для  $u(x_0, t)$  в (1.4.3)

$$-A\omega^2 \cos \frac{\omega}{a} x_0 \cos \omega t = -a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{\omega}{a} \sin \frac{\omega}{a} x_0 \cos \omega t \right) + F(x, t).$$

Поскольку выражение в скобках

$$-A \frac{\omega}{a} \sin \frac{\omega}{a} x_0 \cos \omega t = \frac{\partial u(x_0, t)}{\partial x_0} = \frac{\partial x}{\partial x_0} - 1,$$

то, осуществляя его замену, получим

$$-A\omega^2 \cos \frac{\omega}{a} x_0 \cos \omega t = -a^2 \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial x_0} + F(x, t).$$

Если оператор  $\partial/\partial x$  заменить на  $\partial/\partial x_0$ , то из первого соотношения получим:

$$-A\omega^2 \cos \frac{\omega}{a} x_0 \cos \omega t = -A\omega^2 \cos \frac{\omega}{a} x_0 \cos \omega t + F(x, t) \Rightarrow F(x, t) = 0.$$

Из сравнения обоих результатов видно, что перестановка операций дифференцирования в выражении  $\partial^2 x / \partial x \partial x_0$ , вероятно, недопустима.

**Пример 2.** Определить ограничения, которые необходимо наложить на решение однородного волнового уравнения (1.4.5), полученное в виде

$$u(x_0, t) = A \sin \frac{\omega}{a} (x_0 - at), \text{ т. е. в переменных Лагранжа } x_0, t.$$

Вычислим производные  $\partial u / \partial x_0$  и  $\partial u / \partial t$

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = A \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} (x_0 - at), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -A \frac{\omega}{a} a \cos \frac{\omega}{a} (x_0 - at),$$

Сопоставляя полученные выражения, видим, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x_0} \Rightarrow \frac{\partial u / \partial t}{a} = M = -\frac{\partial u}{\partial x_0}.$$

Таким образом, необходимо наложить существенные ограничения на величины скоростей, при которых число Маха не превышает значений максимально допустимых деформаций в пределах справедливости линейного закона упругости. Как известно [7, стр. 23], для сталей  $|\partial u / \partial x_0|_{\max} = 10^{-3} \div 5 \cdot 10^{-3}$ , а скорость звука  $a \approx 5 \cdot 10^3 \text{ м/с}$ . Поэтому максимально допустимые скорости составляют

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{\max} = 5 \cdot 10^3 (10^{-3} \div 5 \cdot 10^{-3}) = (5 \div 25) \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

**Пример 3.** Оценить весомость неучтенных нелинейных членов, если решение линейного уравнения (1.4.6,б) имеет вид  $u(x,t) = A \sin \frac{\bar{\omega}}{a} x \sin \omega t$ , причем  $\omega \gg \bar{\omega}$ .

Дифференцируя заданное выражение для перемещения  $u(x,t)$  по переменным  $x$  и  $t$ , определяем необходимые для дальнейших расчетов зависимости

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A \frac{\bar{\omega}}{a} \cos \frac{\bar{\omega}}{a} x \sin \omega t, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -A \frac{\bar{\omega}^2}{a^2} \sin \frac{\bar{\omega}}{a} x \sin \omega t,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A \omega \sin \frac{\bar{\omega}}{a} x \cos \omega t, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -A \omega^2 \sin \frac{\bar{\omega}}{a} x \sin \omega t,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = A \frac{\omega \bar{\omega}}{a} \cos \frac{\bar{\omega}}{a} x \cos \omega t, \quad 2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 2 A^2 \frac{\bar{\omega}^2 \omega}{a} \sin \frac{\bar{\omega}}{a} x \cos \frac{\bar{\omega}}{a} x \cos^2 \omega t,$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -A^3 \frac{\omega^2 \bar{\omega}^2}{a^2} \sin^3 \frac{\bar{\omega}}{a} x \cos^2 \omega t + \sin \omega t,$$

$$M^2 = \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = \frac{A^2 \omega^2}{a} \sin^2 \frac{\bar{\omega}}{a} x \cos^2 \omega t,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (M^2) = 2 \frac{A^2 \omega^2 \bar{\omega}}{a^3} \sin \frac{\bar{\omega}}{a} x \cos \frac{\bar{\omega}}{a} x \cos^2 \omega t.$$

Анализируя выражение для  $M^2$ , видим, что амплитуда числа Маха  $A_{\text{м}} = A\omega/a \rightarrow 1$ , если  $\omega \rightarrow a/A$ . Таким образом, при достаточно больших частотах  $\omega$  пренебрежение вторым нелинейным членом недопустимо.

Сопоставим теперь амплитуду нелинейного члена  $\partial(M^2)/\partial x$  и градиента деформации  $\partial^2 u / \partial x^2$

$$2 \frac{A^2 \omega^2 \bar{\omega}}{a^3} \frac{a^2}{A \bar{\omega}^2} = 2 A \frac{\omega^2}{a \bar{\omega}},$$

откуда следует, что пренебречь нелинейным членом можно, если выполняется условие  $\omega \ll \bar{\omega}$ . В этом случае амплитуда нелинейного члена сопоставима с величиной  $2A \frac{\omega}{a}$ , т. е. с амплитудой  $\partial u / \partial x$ .

**Пример 4.** Определить весомость нелинейных членов, если решение линейного уравнения в переменных Эйлера имеет вид  $u(x, t) = Ax \cos \omega t$ .

Дифференцируя функцию  $u(x, t)$  по  $x$  и  $t$ , находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A \cos \omega t, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\omega A x \sin \omega t, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 A x \cos \omega t,$$

$$M^2 = \frac{\omega^2 A^2}{a^2} x^2 \sin^2 \omega t, \quad \frac{\partial}{\partial x} (M^2) = 2 \frac{\omega^2 A^2}{a^2} x \sin^2 \omega t.$$

В связи с тем, что деформация является однородной ( $\partial^2 u / \partial x^2 = 0$ ), то и второй нелинейный член, зависящий от  $\partial^2 u / \partial x^2$ , тоже равен нулю.

Если сопоставить теперь амплитуды первого нелинейного члена и  $\partial^2 u / \partial t^2$ , то получим

$$\frac{a^2 \partial(M^2) / \partial x}{\partial^2 u / \partial t^2} = \frac{a^2 2 \omega^2 A^2}{a^2} \frac{1}{\omega^2 A} = 2A,$$

что соответствует удвоенной амплитуде деформации  $\partial u / \partial x \ll 1$ . Поэтому при однородной деформации первым нелинейным членом

можно пренебречь независимо от значений числа Маха. Ситуация становится понятной, если принять во внимание, что в этом случае запись линейного уравнения фактически имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -Ax\omega^2 \cos \omega t.$$

При этом запись соответствующего нелинейного уравнения при  $\partial^2 u / \partial x^2 = 0$ , очевидно, будет такой

$$\frac{d^2 u}{dt^2} \approx -Ax\omega^2 \cos \omega t.$$

Сравнивая между собой оба уравнения, приходим к выводу, что  $\partial^2 u / \partial t^2 = d^2 u / dt^2$ .

#### 1.4.8. Контрольные вопросы

1. С каким координатами, начальными  $x_0$ , или текущими  $x$ , следует связывать напряженное состояние материального объема? Почему?
2. Поясните некорректность математической записи принципа Даламбера применительно к материальному объему, если ускорение выразить как функцию переменных Лагранжа в виде  $\partial^2 u(x_0, t) / \partial t^2$ .
3. Покажите, как появляется в уравнении движения смешанная производная  $\partial^2 u(x_0, t) / \partial x \partial x_0$  в случае некорректной математической записи принципа Даламбера.
4. К какому виду уравнения движения приводит некорректная математическая запись принципа Даламбера применительно к подвижному материальному объему?
5. Укажите на сомнительный переход от некорректной математической записи принципа Даламбера к волновому уравнению в переменных Лагранжа.
6. Почему запись волнового уравнения в виде

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial t} + \dot{u} \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F$$

означает лишь частичный переход к переменным Эйлера? Какие операции необходимо произвести для полного перехода к переменным Эйлера?

7. Означает ли запись волнового уравнения в виде

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F$$

переход к переменным Эйлера? Если нет (да), то почему?

8. Сформулировать следствие, которое вытекает из предположения, что обе записи волнового уравнения, т. е. (1.4.5) и (1.4.6), имеют одинаковую погрешность. Какому очевидному выводу противоречит это следствие?

9. Опишите сущность метода, с помощью которого можно произвести оценку весомости нелинейных членов волнового уравнения в переменных Эйлера.

10. В каком случае и для какого представления решения волнового уравнения отчетливо проявляются необходимость ограничения скорости? Запишите характерную зависимость для такого ограничения.

11. Запишите волновое уравнение с нелинейными членами, содержащими число Маха. Сформулируйте условия, при которых нелинейными членами можно пренебречь.

12. Сформулируйте условие, при котором даже в случае малых чисел Маха  $M \ll 1$  нелинейными членами пренебрегать нельзя.

13. Покажите, что переход от записи волнового уравнения в виде  $d^2 u / dt^2 = a^2 \partial^2 u / \partial x^2$  к записи в переменных Лагранжа  $x_0, t$  некорректен.

14. Почему переход от записи волнового уравнения в виде  $d^2 u / dt^2 = a^2 \partial^2 u / \partial x^2$  к переменным Эйлера происходит автоматически и вполне корректно?

15. Назовите имена ученых, которые занимались выводом уравнения колебания струны.

16. Сформулируйте общепринятое условие, при выполнении которого выведено уравнение колебания струны.

17. Запишите уравнение колебания струны и поясните физический смысл коэффициента при втором члене уравнения.

18. Можно ли описать колебания струны с помощью классического уравнения при незначительном предварительном натяжении  $T_n \approx 0$ ?

19. Опишите ситуации, которым соответствуют случаи колебаний струны при незначительном предварительном натяжении.

20. Назовите составляющие реального натяжения струны.

21. Запишите и объясните формулу для определения продольных деформаций струны.

22. При каком условии формулы для определения продольных деформаций струны приводят практически к одинаковому результату?
23. Запишите приближенную взаимосвязь между продольной деформацией струны и углом ее отклонения.
24. Запишите основные приближения, которые используются при выводе уравнения колебаний струны при малых углах отклонения.
25. Запишите уравнение колебаний струны, выведенное с учетом и предварительного натяжения, и натяжения за счет отклонения.
26. Поясните физический смысл коэффициентов в нелинейном уравнении колебаний струны.

### **1.5. Методология оценки погрешности трехмерных уравнений движения классической теории упругости (уравнений Ламе)**

#### **1.5.1. Общие положения**

При записи уравнений Ламе в общепринятой векторной форме согласно [2, стр. 175]

$$(\lambda + G)\text{grad div}\vec{u} + G\nabla^2\vec{u} + \rho\vec{F} = \rho\ddot{\vec{u}}, \quad \lambda = \frac{2\nu G}{1 - 2\nu} \quad (1.5.1)$$

полагают, что  $\ddot{\vec{u}}$  есть вектор ускорения центра масс элементарного объема деформируемой упругой среды с модулем Гука –  $G$ , плотностью –  $\rho$  и коэффициентом Пуассона –  $\nu$ .

Переходя к декартовой системе координат  $x_j$ , получают три скалярных уравнения

$$(\lambda + G)\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x_j} + G\nabla^2 u_i + \rho F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad \varepsilon_0 = \text{div}\vec{u}, (i=1,2,3) \quad (1.5.2)$$

и делают иногда оговорку [2, стр. 176; 5, стр. 513], что в случае, когда  $x_j$  являются переменными Эйлера, то опущенные конвективные члены в выражении для ускорения [2, стр. 39]

$$\frac{d^2 u_i}{dt^2} = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t} + \dot{u}_i \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_i} + \dot{u}_j \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \dot{u}_k \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_k}, \quad \dot{u}_i = \frac{du_i}{dt} \quad (1.5.3)$$

являются малыми величинами, которыми можно пренебречь.

Если же  $x_j$  считать переменными Лагранжа, а это якобы вполне допустимо, поскольку обусловлено возможностью отождествления эйлеровых и лагранжевых координат, то запись уравнений движения в виде (1.5.2) позволяет избежать необходимости оценки конвективных членов, отсутствующих вообще, как мы уже установили в п. 1.3., в выражении для ускорения. Именно это обстоятельство стало фундаментальным положением механики деформируемого твердого тела, благодаря которому ее нелинейные аспекты в упомянутом направлении на протяжении 19–20-го веков даже не обсуждались, видимо, как не существующие.

Если исходить из положения об отсутствии указанной проблемы, то конвективные члены при записи уравнений Ламе в переменных Эйлера действительно должны быть малыми величинами при любых обстоятельствах, когда  $\partial u_i / \partial x_i \ll 1$  и перемещения тоже малы. Хотя, как мы уже видели, даже в одномерном случае это не так.

### 1.5.2. Представление общего решения уравнений Ламе

Попытаемся по аналогии с представлением общего решения одномерного волнового уравнения в виде (1.4.7) дать такое же представление и для уравнений Ламе. С этой целью связанную систему (1.5.2) можно различными способами [6, стр. 439, 13, стр. 387] расщепить и свести к условно независимым трехмерным волновым уравнениям. Если принять  $F_i = \text{const}$ , то, полагая

$$\vec{u} = \text{grad } \Phi + \text{rot } \vec{A},$$

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad u_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}, \quad (1.5.4)$$

из уравнений (1.5.2) после подстановки этих выражений получим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2G}{\rho} \nabla^2 \Phi = \frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)} \nabla^2 \Phi,$$

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \nabla^2 \vec{A}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.5.5)$$

Как известно из векторного анализа [15, стр. 211], величины  $\Phi$  и  $\vec{A}$  называются скалярными и векторными потенциалами соответственно.

Следует также помнить, что второе уравнение (1.5.5) записано в векторной форме, и поэтому его можно представить в виде трех скалярных уравнений относительно компонент  $A_x, A_y, A_z$ .

Непосредственной подстановкой несложно убедиться, что общее решение произвольного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = a^2 \nabla^2 u \quad (1.5.6)$$

можно представить в виде

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 + u_3 + u_L + u_L t, \\ u_1 &= f_1(x \pm at + \lambda_x) + f_2(y \pm at + \lambda_y) + f_3(z \pm at + \lambda_z), \\ u_2 &= \varphi_1 \left( \frac{m_1 x + n_1 y}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2}} \pm at + \beta_1 \right) + \varphi_2 \left( \frac{m_2 x + n_2 z}{\sqrt{m_2^2 + n_2^2}} \pm at + \beta_2 \right) + \\ &+ \varphi_3 \left( \frac{m_3 y + n_3 z}{\sqrt{m_3^2 + n_3^2}} \pm at + \beta_3 \right), \quad u_3 = \psi \left( \frac{mx + ny + kz}{\sqrt{m^2 + n^2 + k^2}} \pm at + \beta \right), \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

где  $u_1, u_2, u_3$  – частные решения, каждое из которых удовлетворяет волновому уравнению при любой комбинации знаков перед  $at$ ;  $u_L$  – общее решение уравнения Лапласа  $\nabla^2 u_L = 0$ ;  $f_{1-3}, \varphi_{1-3}, \psi$  – произвольные функции, дважды дифференцируемые по сложному (в скобках) и по независимым аргументам  $x, y, z, t$ ;  $m_i, n_i, k_i$  – коэффициенты с произвольными действительными или комплексными значениями в том числе и виде интегральных (дифференциальных) выражений от параметров, не зависящих от  $x, y, z, t$ ;  $\lambda_i, \beta_i, \beta$  – параметры, не зависящие от  $x, y, z, t$ .

Необходимо иметь в виду, что общее количество членов, соответствующее  $u_{1,2,3}$ , фактически следует удвоить по сравнению с

(1.5.7), т. е. записать все члены со знаком плюс и со знаком минус при слагаемых  $at$ .

Нетрудно заметить, что из выражений для  $u_{1,2,3}$  после подстановки  $a = i = -1$  сразу же получаем представление общего решения четырехмерного уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (1.5.8)$$

Для трехмерного уравнения это представление, очевидно, будет таким:

$$u_e(x, y, z) = \bar{f}_1(x \pm iz + \lambda_x) + \bar{f}_2(y \pm iz + \lambda_y) + \bar{\psi}\left(\frac{mx + ny}{\sqrt{m^2 + n^2}} \pm iz + \beta\right). \quad (1.5.9)$$

Если по очереди менять местами  $z$  на  $x$  или же на  $y$ , то полученные таким способом выражения тоже будут решениями уравнения Лапласа.

Следует заметить, что  $u_L(x, y, z)$  представляет собой одно из так называемых тривиальных решений волнового уравнения (1.5.6), когда и левая, и правая его части, каждая в отдельности, равны нулю, т. е.  $\partial^2 u_L / \partial t^2 = 0$  и  $\nabla^2 u_L = 0$ . Таким же условиям, по-видимому, удовлетворяет и другая функция  $\bar{u}_L(x, y, z, t) = u_L t$ , которая имеется в общем выражении (1.5.7). И, наконец, если быть последовательным, то из таких же соображений к общему решению необходимо еще добавить и решения всех трех двумерных волновых уравнений и уравнений Лапласа  $u_L(x, y), u_L(x, z), u_L(y, z)$ , а также соответствующие им произведения  $u_L t$ .

Представление общих решений в форме, преобразуемой к  $u_1$  или  $u_3$  при  $\lambda_i = 0$ ,  $\beta = 0$ , предлагается в [16, 17]. Что же касается формы  $u_2$ , то в известных автору публикациях она не встречается. Не исключены, по-видимому, и другие формы. В [17], например, предложена интегральная форма общего решения, но с подынтегральной функцией, преобразуемой в  $u_3$ .

Если воспользоваться представлениями общих решений волновых уравнений (1.5.5) в виде (1.5.7) и подставить их в соотношения для скалярного  $\Phi$ , и векторного  $\vec{A}$  потенциалов согласно (1.5.4), а затем – в (1.5.2), то в конечном итоге получим представление общего решения уравнений Ламе. Однако, легко подсчитать, что только частные

решения  $u_{1,2,3}$  с учетом знаков перед  $a$  и  $t$  дают выражения для  $u_i$ , каждое из которых содержит 42 члена. Если же учитывать еще и соотношение (1.5.9) со всеми возможными комбинациями, то их количество значительно возрастет.

### 1.5.3. Оценка погрешности трехмерного волнового уравнения

Из рассуждений, приведенных в п.1.5.2., видно, что метод, который позволил без особых затруднений получить оценку погрешности для одномерного волнового уравнения, используя представление Даламбера, в применении к уравнениям Ламе становится чрезвычайно громоздким. И действительно, выполнять преобразования этих уравнений с представлением общего решения, состоящего из полусотни и более членов, вряд ли можно считать оправданным. Поэтому попытаемся объединить этот подход с традиционным, который базируется на раскрытии выражения для полной производной  $d^2u_i/dt^2$ . Если попытаться такое раскрытие выполнить путем подстановки выражения для скорости

$$\dot{u}_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \dot{u}_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \dot{u}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dot{u}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \quad (i=1,2,3) \quad (1.5.10)$$

в (1.5.3), то предстоящий объем преобразований окажется, хотя и меньше, чем в первом случае, но все же очень большим. Поэтому не случайно, что автор [4, стр. 78], пытавшийся получить развернутое выражение для  $d^2u/dt^2$ , привел лишь промежуточный результат. Мы же для решения этой задачи воспользуемся подходом, рассмотренным в п. 1.4. при выводе формулы (1.4.9, б).

Предположим, что решение трехмерного волнового уравнения можно представить в виде

$$u_i = \varphi(\bar{m}x + \bar{n}y + \bar{k}z + at), \quad (1.5.11)$$

т. е. воспользуемся только выражением для одного слагаемого  $u_3$  в (1.5.7).

Найдем полную производную  $d^2u_i/dt^2$  от выражения (1.5.11)

$$\frac{du_i}{dt} = (\bar{m}\dot{x} + \bar{n}\dot{y} + \bar{k}\dot{z} + a)\varphi',$$

$$\frac{d^2 u_x}{dt^2} = (\bar{m}\dot{x} + \bar{n}\dot{y} + \bar{k}\dot{z} \pm a)^2 \varphi'' + (\bar{m}\ddot{x} + \bar{n}\ddot{y} + \bar{k}\ddot{z})\varphi'. \quad (1.5.12)$$

После возведения в квадрат и раскрытия скобок имеем

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= \bar{m}\varphi'\dot{x} + \bar{n}\varphi'\dot{y} + \bar{k}\varphi'\dot{z} + a\varphi', \\ \frac{d^2 u_i}{dt^2} &= \bar{m}^2\varphi''\dot{x}^2 + \bar{n}^2\varphi''\dot{y}^2 + \bar{k}^2\varphi''\dot{z}^2 + a^2\varphi'' + 2\bar{m}\bar{n}\varphi''\dot{x}\dot{y} + 2\bar{m}\bar{k}\varphi''\dot{x}\dot{z} + \\ &+ 2\bar{n}\bar{k}\varphi''\dot{y}\dot{z} + 2\bar{m}a\varphi''\dot{x} + 2\bar{n}a\varphi''\dot{y} + 2\bar{k}a\varphi''\dot{z} + \\ &+ \bar{m}\varphi'\ddot{x} + \bar{n}\varphi'\ddot{y} + \bar{k}\varphi'\ddot{z}. \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

Запишем также выражения для частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x} &= \bar{m}\varphi', \quad \frac{\partial u_i}{\partial y} = \bar{n}\varphi', \quad \frac{\partial u_i}{\partial z} = \bar{k}\varphi', \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} &= \bar{m}^2\varphi'', \quad \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} = \bar{n}^2\varphi'', \quad \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = \bar{k}^2\varphi'', \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} &= a\varphi', \quad \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = a^2\varphi'', \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y} &= \bar{m}\bar{n}\varphi'', \quad \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial z} = \bar{m}\bar{k}\varphi'', \quad \frac{\partial^2 u_i}{\partial y \partial z} = \bar{n}\bar{k}\varphi''. \end{aligned} \quad (1.5.14)$$

Следует помнить, что производные  $\varphi', \varphi''$  означают дифференцирование по сложному аргументу  $\bar{m}x + \bar{n}y + \bar{k}z + at$ , а производные с точкой —  $\dot{x} = dx/dt$ ,  $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ .

Если теперь сравнить между собой коэффициенты при переменных  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$  в (1.5.14) с соответствующим выражениями в (1.5.13), то после замены этих коэффициентов получим

$$\frac{d^2 u_i}{dt^2} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \dot{x}^2 + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} \dot{y}^2 + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} \dot{z}^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y} \dot{x}\dot{y} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial z} \dot{x}\dot{z} + \right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 u_i}{\partial y \partial z} \dot{y} \dot{z} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial t} \dot{x} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y \partial t} \dot{y} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z \partial t} \dot{z} \right) + \frac{\partial u_i}{\partial x} \ddot{x} + \frac{\partial u_i}{\partial y} \ddot{y} + \frac{\partial u_i}{\partial z} \ddot{z} . \quad (1.5.15)$$

Под обозначением  $u_i$  следует понимать произвольную компоненту перемещения, т. е.  $u_x, u_y$  или  $u_z$ . Тогда, имея в виду, что

$$\ddot{x} = \frac{d^2 u_x}{dt^2}, \quad \ddot{y} = \frac{d^2 u_y}{dt^2}, \quad \ddot{z} = \frac{d^2 u_z}{dt^2},$$

приходим к выводу, что для определения выражений, соответствующих всем трем компонентам вектора ускорения, необходимо записать три уравнения, которые окажутся связанной алгебраической системой относительно  $d^2 u_x / dt^2$ ,  $d^2 u_y / dt^2$ ,  $d^2 u_z / dt^2$ . После решения такой системы можно найти выражения и для каждой компоненты.

Однако следует обратить внимание, что в тех случаях, когда все три компоненты – величины одного порядка, то последние три члена в (1.5.15) могут быть опущены, если  $\partial u_i / \partial x \ll 1$ ,  $\partial u_i / \partial y \ll 1$ ,  $\partial u_i / \partial z \ll 1$ , поскольку в левой части при  $d^2 u_i / dt^2$  коэффициент равен единице. В таком случае все три уравнения становятся независимыми.

Чтобы убедиться в корректности предложенного подхода вывод формулы (1.5.15) выполним и другим, необычайно простым методом. Для этого запишем выражение для полного дифференциала функции  $u_i(x, y, z, t)$ , у которой  $t$  – независимая переменная, а другие переменные зависимые, т. е.  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ , следуя правилу, изложенному в учебном пособии [18, стр. 412–414]

$$\begin{aligned} d^2 u_i &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} dz^2 + \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dt^2 + \\ &+ 2 \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial z} dx dz + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y \partial z} dy dz \right) + \\ &+ 2 \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial t} dx dt + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y \partial t} dy dt + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z \partial t} dz dt \right) + \end{aligned}$$

$$+\frac{\partial u_i}{\partial x}d^2x+\frac{\partial u_i}{\partial y}d^2y+\frac{\partial u_i}{\partial z}d^2z. \quad (1.5.16)$$

Нетрудно заметить, что после деления на  $dt^2$  правой и левой частей соотношения (1.5.16) сразу же получаем (1.5.15).

Полученный согласно (1.5.16) результат представляет собой удивительный пример того, как наиболее простые решения почему-то обычно выпадают из поля зрения, хотя и находятся на виду, не требуя сложных вычислений.

С учетом изложенного запишем нелинейное, неоднородное волновое уравнение

$$\frac{d^2u_i}{dt^2}-a^2\nabla^2u_i=F_i. \quad (1.5.17)$$

После подстановки (1.5.15) с опущенными тремя последними членами в (1.5.17) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2u_i}{\partial t^2}+a^2\left\{\left[\left(\frac{\dot{x}^2}{a^2}-1\right)\frac{\partial^2u_i}{\partial x^2}+\left(\frac{\dot{y}^2}{a^2}-1\right)\frac{\partial^2u_i}{\partial y^2}+\left(\frac{\dot{z}^2}{a^2}-1\right)\frac{\partial^2u_i}{\partial z^2}\right]+ \right. \\ \left. +2\left(\frac{\partial^2u_i}{\partial x\partial y}\frac{\dot{x}\dot{y}}{a^2}+\frac{\partial^2u_i}{\partial x\partial z}\frac{\dot{x}\dot{z}}{a^2}+\frac{\partial^2u_i}{\partial y\partial z}\frac{\dot{y}\dot{z}}{a^2}\right)+ \right. \\ \left. +2\left(\frac{\partial^2u_i}{\partial x\partial t}\frac{\dot{x}}{a^2}+\frac{\partial^2u_i}{\partial y\partial t}\frac{\dot{y}}{a^2}+\frac{\partial^2u_i}{\partial z\partial t}\frac{\dot{z}}{a^2}\right)\right\}=F_i. \end{aligned} \quad (1.5.18)$$

Из (1.5.18) видно, что переход к линейному волновому уравнению возможен при тех же условиях, что и в одномерном случае (1.4.12), (1.4.13), если величины смешанных производных по координатам конечны. Однако, число Маха в трехмерном случае, как и скорость, имеет три компоненты:  $M_x=\dot{x}/a$ ,  $M_y=\dot{y}/a$ ,  $M_z=\dot{z}/a$  и поэтому возможность такого перехода требует оценки  $M_{x1}, M_y, M_z$ .

#### 1.5.4. Оценка погрешности уравнений Ламе

Поскольку уравнения Ламе (1.5.2) можно привести к четырем волновым уравнениям (1.5.5) с различными коэффициентами  $a_i$ , то

оценки, приведенные в п. 1.5.3, без особых опасений допустимо распространить и на этот случай. Что касается более точных оценок, то их тоже можно получить, поскольку уравнения (1.5.2) отличаются от волновых только наличием члена  $\frac{1}{\rho}(\lambda + G)\text{grad div}\vec{u}$ . Однако наличие в этом члене и двух других компонент перемещения приводит к достаточно громоздким преобразованиям, и поэтому получение уточненных оценок становится малоэффективным.

### **1.5.5. Контрольные вопросы**

1. Расскажите о методе приведения уравнений Ламе к волновым уравнениям.
2. Какое количество волновых уравнений получается в случае приведения к ним уравнений Ламе?
3. В каком виде можно представить общее решение волнового уравнения?
4. Каким способом можно получить общее представление решения уравнения Лапласа?
5. Удовлетворяет ли решение уравнения Лапласа волновому уравнению?
6. Расскажите о методе оценки погрешности трехмерного волнового уравнения.
7. Каким способом можно сразу записать развернутое выражение для  $d^2u_i(x, y, z, t)/dt^2$ , не прибегая к сложным преобразованиям?
8. При каких условиях возможен переход от нелинейного к линейному волновому уравнению в трехмерном случае?
9. Сформулируйте особенности оценки погрешности линейных уравнений Ламе, исходя из погрешности волнового уравнения.

### **1.6. Парадоксы классических решений волнового уравнения**

Задачи о продольных колебаниях стержня стали уже классическими. Без них не обходятся учебные пособия по математической физике [19], теории колебаний [8, 13] и др. Большое количество задач о колебаниях стержня, решения которых считаются точными, имеется в знаменитой книге [12], ставшей настольной у инженеров, научных работников и

педагогов. Однако тщательный анализ таких решений [20], представленных в виде бесконечных рядов, приводит к парадоксальным выводам, заставляющим усомниться в их достоверности. При этом установлено, что следствия, вытекающие из этих решений, противоречат установившимся представлениям о физической картине механических колебаний и содержат неувязки математического характера.

### 1.6.1. Свободные продольные колебания стержня

Задача о свободных колебаниях стержня по праву занимает первое место и во многих учебных пособиях, и в классическом труде [12].

Согласно [12, стр. 327–329], решение задачи о продольных свободных колебаниях стержня с одним закрепленным концом (рис.1.3)

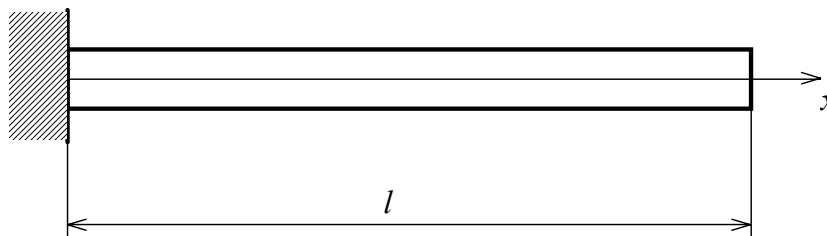


Рис. 1.3. К расчету свободных колебаний стержня с одним закрепленным концом

при начальных и граничных условиях

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varepsilon_0 x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0 \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

имеет такой вид:

$$u = \frac{8\varepsilon_0 l}{\pi^2} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(i-1)/2}}{i^2} \sin \frac{i\pi x}{2l} \cos \frac{i\pi at}{2l}, \quad (1.6.2)$$

где  $\varepsilon_0$  — начальная деформация, которая является однородной, поскольку  $\partial u(x, 0) / \partial x = \varepsilon_0$ .

Условия (1.6.1), очевидно, по предположению автора задачи, соответствуют случаю, когда к свободному концу стержня была приложена растягивающая или сжимающая сила в статическом режиме,

благодаря чему стержень оказался подвергнутым однородной деформации. После мгновенного освобождения нагруженного конца возникает колебательный процесс по закону, согласно (1.6.2). Однако нетрудно заметить, что начальное условие  $u(x, 0) = \varepsilon_0 x$  противоречит граничному условию  $\partial u / \partial x(l, t) = 0$ , поскольку  $\partial u / \partial x(x, 0) = \varepsilon_0$ .

Если в (1.6.2) выполнить подстановку  $x = l$ , то получим выражение для перемещения незакрепленного конца

$$u_{x=l} = \frac{8\varepsilon_0 l}{\pi^2} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^2} \cos \frac{i\pi at}{2l}. \quad (1.6.3)$$

Сумма такого ряда, согласно [21, стр. 80], известна

$$\sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^2} \cos \frac{i\pi at}{2l} = \frac{\pi}{4} \left( \frac{\pi}{2} - \left| \frac{\pi at}{2l} \right| \right), \quad -\frac{2l}{a} \leq t \leq \frac{2l}{a} \quad (1.6.4)$$

и после подстановки в (1.6.3) дает выражение

$$u_{x=l} = \varepsilon_0 a \left( \frac{l}{a} - t \right) = \varepsilon_0 (l - at), \quad \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x=l} = -\varepsilon_0 a = \text{const}, \quad (1.6.5)$$

графическое изображение которого с учетом периодического продолжения имеет вид, представленный на рис. 1.4.

Дифференцируя (1.6.2) по  $x$ , а затем приняв  $x = 0$ , получим выражение для деформации на закрепленном конце стержня

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{4\varepsilon_0}{\pi} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(i-1)/2}}{i} \cos \frac{i\pi at}{2l}. \quad (1.6.6)$$

Сумма такого ряда общеизвестна [21, стр. 80]. Она составляет  $\pi/4$  для  $-l/a < t < l/a$  и равна 0 для  $t = \pm l/a$ . Графическое изображение этой функции имеется в [12, стр. 92] и показано на рис 1.4, согласно которому  $(\partial u / \partial x)_{x=0} = \pm \varepsilon_0$ , т. е. деформация на закрепленном конце стержня по абсолютной величине остается неизменной, но периодически меняет знак.

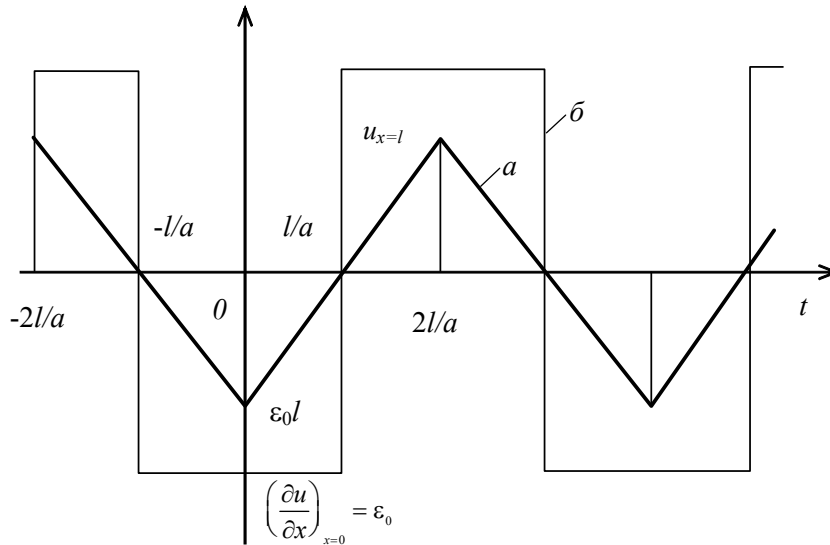


Рис. 1.4. Графическое изображение функций:  $a$  – перемещение свободного конца стержня;  $b$  – деформация на закрепленном конце

Дифференцируя (1.6.3) дважды по  $t$ , получим выражение для ускорения свободного конца

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{x=l} = -\frac{2\varepsilon_0 a^2}{l} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \cos \frac{i\pi a t}{2l}. \quad (1.6.7)$$

Утверждать однозначно, что сумма этого ряда является производной по  $t$  от функции  $\partial u / \partial t$ , нельзя, поскольку ряд расходится для всех значений  $t$ , кроме  $t = \pm l/a$ , где его сумма равна нулю. Однако, это противоречит (1.6.5) и рис. 1.4, согласно которым везде, кроме угловых точек,  $(\partial^2 u / \partial t^2)_{x=l} = 0$ . К тому же, результаты (1.6.3) и (1.6.6) противоречат физическому смыслу, поскольку оказывается, что движение свободного конца происходит с постоянной скоростью в каждом направлении, а нагружение закрепленного конца соответствует статическому состоянию, когда свободный конец находится в крайних точках (рис. 1.4), согласно которым везде, кроме угловых точек  $(\partial^2 u / \partial t^2)_{x=l} = 0$ . Если воспользоваться приближенным решением, сохранив лишь первую гармонику, то указанные физические противоречия снимаются и, как следует из (1.6.6), на закрепленном конце появляется скачок нагрузки примерно 27%. Однако несоответствие начальному условию  $u(0, l) = \varepsilon_0 l$  в этом случае

составляет  $\sim 20\%$ . Если же в приближенном решении оставить большее количество гармоник, то возникает серьезная проблема с определением ускорения из расходящегося ряда, поскольку коэффициенты при всех его членах равны единице.

Из рассмотренного выше может показаться, что подмеченные парадоксы относятся лишь к особым точкам, в данном случае к концам стержня, поскольку аналогичные локальные особенности (сингулярности) встречаются во многих задачах, не вызывая сомнений в правдоподобности полученной картины в целом. Чтобы рассеять подобного рода сомнения, рассмотрим поведение решения задачи о свободных колебаниях стержня и в других (неособых) сечениях, т. е. для  $0 \leq x \leq l$ .

Решение задачи можно получить, используя уже известное нам представление Даламбера (1.4.7), откуда с учетом начальных условий (1.6.1) вытекает

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (x - at) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 (x + at) = \varepsilon_0 x. \quad (1.6.8)$$

Именно этот результат приведен в учебных пособиях [13, стр. 243; 22, стр. 208], где оговаривается наличие прямой и обратной волн, но почему-то игнорируется очевидный факт их взаимного гашения, из-за чего решение (1.6.8), фактически имеющее вид  $u(x, t) = \varepsilon_0 x$ , повторяет лишь первое начальное условие. К тому же нетрудно заметить, что удовлетворить граничное условие  $\partial u / \partial x(l, t) = 0$  не представляется возможности, а описываемый согласно (1.6.8) колебательный процесс на самом деле от времени  $t$  не зависит. Колебательный характер такому процессу можно придать лишь искусственно. Поэтому рассматриваемая механическая система по сути дела не способна выйти из статического состояния, заданного согласно (1.6.1). Сказанное означает, что решения задачи, удовлетворяющего поставленным условиям, не существует.

Как и наши предшественники [13, 22], пока не станем обращать внимание на упомянутую выше неприятную особенность решения (1.6.8). Будем, как и они, считать, что имеется две волны, бегущие вдоль стержня со скоростью  $a$  в прямом и обратном направлениях, и преобразуем (1.6.8.) к такому виду:

$$u(x,t) = \frac{l\varepsilon_0}{\pi} \left( \frac{\pi(x-at)}{2l} + \frac{\pi(x+at)}{2l} \right) = \frac{l\varepsilon_0}{\pi} \left( \frac{\pi z}{2l} + \frac{\pi \bar{z}}{2l} \right). \quad (1.6.9)$$

Представим теперь каждый член, описывающий прямую и обратную волны, в скобках (1.6.9) в виде тригонометрического ряда согласно [21, стр. 80]

$$u(x,t) = \frac{4\varepsilon_0 l}{\pi^2} \left[ \left( \sin \frac{\pi z}{2l} - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi z}{2l} + \dots \right) + \left( \sin \frac{\pi \bar{z}}{2l} - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi \bar{z}}{2l} + \dots \right) \right] \quad (1.6.10)$$

и все же примем к сведению, что в целом сумма этих двух бесконечных рядов, как и выражений (1.6.8), (1.6.9), которые они представляют, тоже не должна зависеть от аргумента  $t$ .

Воспользуемся теперь известной [21, стр. 70] формулой

$$\sin \frac{i\pi}{2l}(x \pm at) = \sin \frac{i\pi x}{2l} \cos \frac{i\pi at}{2l} \pm \cos \frac{i\pi x}{2l} \sin \frac{i\pi at}{2l}, \quad (i = 1, 3, 5, \dots) \quad (1.6.11)$$

и преобразуем все члены обоих рядов в (1.6.10). Тогда, в соответствии с (1.6.11), все выражения, содержащие  $\cos(i\pi x/2l) \sin(i\pi at/2l)$ , взаимно сократятся, а (1.6.10) сразу же превратится в уже известную нам формулу (1.6.2), традиционный способ вывода которой достаточно сложен.

Поскольку общая сумма рядов (1.6.10), как уже оговаривалось, не зависит от времени  $t$ , то вполне логично полагать, что и сумма ряда в (1.6.2) тоже не должна зависеть от этого аргумента. Однако, после подстановки в (1.6.2) значения  $x=l$  мы получим зависимость (1.6.3), из которой такое, казалось бы очевидное, следствие не вытекает. К тому же согласно (1.6.5)  $\partial u / \partial t(l,t) = -a\varepsilon_0$ . Но если же для определения скорости конца стержня дифференцирование ряда (1.6.3) по  $t$  выполнить до его суммирования, то получим результат

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x=l} = -\frac{4\varepsilon_0 a}{\pi} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{i} \sin \frac{i\pi at}{2l}, \quad (1.6.12)$$

из которого следует, что только таким способом можно удовлетворить второе начальное условие (1.6.1).

Решение (1.6.2) обычно получают путем достаточно громоздких преобразований методом Фурье [8, стр. 237; 12, стр. 327], и такой,

неожиданный, и, казалось бы, вполне корректный переход от статического (1.6.8) к динамическому результату (1.6.2) приводит в недоумение. И действительно, из (1.6.3) вытекает, хотя и неправдоподобный, но все же колебательный процесс в виде пилообразной функции (рис. 1.4). К тому же после дифференцирования (1.6.2.) по  $x$  легко убедиться, что  $\partial u / \partial x(l, t) = 0$ , т. е. решение в виде ряда удовлетворяет, в противоположность (1.6.8), и второму граничному условию.

Парадоксы рассмотренного перехода ускользнули из поля зрения известных математиков, по-видимому, потому, что элементарные преобразования от (1.6.8) к (1.6.2), фактически заимствованные автором из [6, стр. 96; 13, стр. 244 и др.], никем не доводились до конца. Они прекращались, как только становилось понятно, что с помощью формулы (1.6.11) выражения типа (1.6.2) легко преобразуются в представления Даламбера (1.4.7), и лишь на этом основании без детального сопоставления конечных формул сформировалась некорректная точка зрения о полном совпадении обоих результатов. В рассмотренном, а также во многих других случаях, когда игнорируются классические требования о неразрывности и дифференцируемости граничных функций, это не подтверждается. На самом же деле (1.6.2) и (1.4.7) оказались различными функциями, хотя и одинаковых аргументов  $(x \pm at)$ .

### 1.6.2. Вынужденные колебания стержня под действием внезапно приложенной постоянной силы

Предположим, что к свободному концу стержня с одним закрепленным концом внезапно прикладывается постоянная продольная сила  $Q$  (рис. 1.5).

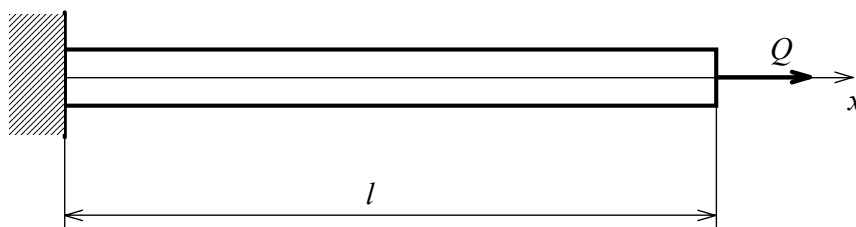


Рис. 1.5. К расчету вынужденных колебаний стержня под действием внезапно приложенной силы

Начальные и граничные условия в этом случае согласно [19, стр. 90] таковы:

$$\begin{aligned} u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \frac{Q}{ES}. \end{aligned} \quad (1.6.13)$$

Они, как и в предыдущей задаче, содержат то же противоречие.

Воспользуемся теперь решением этой задачи, которое в [12, стр. 334] представлено в виде

$$u = \frac{8lQ}{\pi^2 a^2 \rho S} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(i-1)/2}}{i^2} \sin \frac{i\pi x}{2l} \left( 1 - \cos \frac{i\pi at}{2l} \right). \quad (1.6.14)$$

Дифференцируя (1.6.14) по  $x$ , имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{4Q}{\pi a^2 \rho S} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(i-1)/2}}{i} \cos \frac{i\pi x}{2l} \left( 1 - \cos \frac{i\pi at}{2l} \right), \quad (1.6.15)$$

откуда после подстановки  $x = l$  находим

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l} = 0,$$

хотя согласно граничному условию должно быть  $(\partial u / \partial x)_{x=l} = Q / ES$ . Тем не менее, именно этот результат получим из (1.6.15), если сначала раскрыть скобки, затем просуммировать первый ряд (его сумма согласно [21, стр. 80] равна  $\pi^2 x / 8l$ ) и лишь после этого продифференцировать по  $x$ . Как видим почленное дифференцирование сходящегося ряда (1.6.14) приводит к нежелательному результату, если предварительно не просуммировать его часть в виде ряда по  $x$ .

Деформацию на закрепленном конце получим, если в (1.6.15) подставим  $x = 0$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{4Q}{\pi a^2 \rho S} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(i-1)/2}}{i} \left( 1 - \cos \frac{i\pi at}{2l} \right). \quad (1.6.16)$$

Сумма первого числового ряда в (1.6.16) согласно [21, стр. 13]

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Сумма второго ряда тоже равна  $\pi/4$ . Она уже рассмотрена при анализе (1.6.3). С учетом этого графическое представление деформации на закрепленном конце выйдет согласно рис. 1.6 совершенно неестественно. Сравнивая рис. 1.6 с рис. 1.4, видим, что они фактически совпадают, если изображение на рис. 1.6 расположить симметрично оси  $t$ , и таким образом, как и в предыдущем случае, это изображение представляет собой физический абсурд.

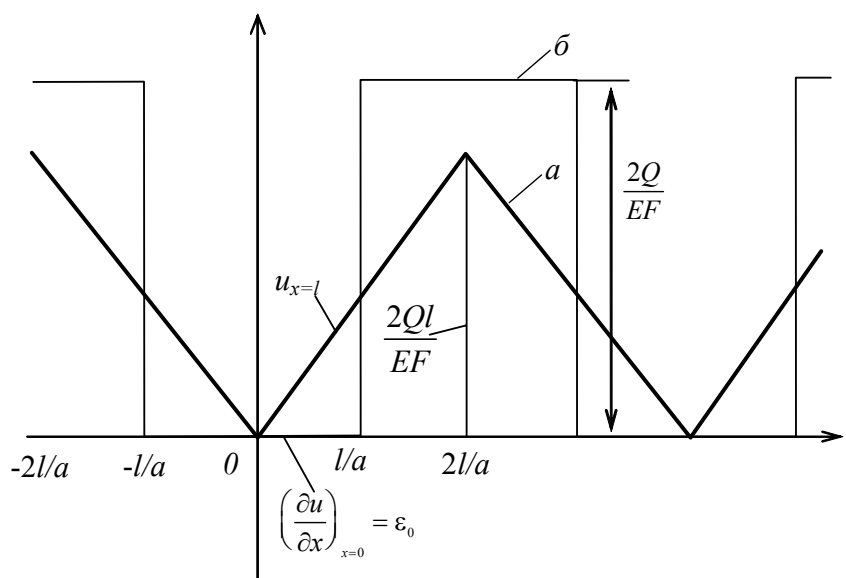


Рис.1.6. Графическое изображение функций:  $a$  – перемещение свободного конца стержня;  $b$  – деформация на закрепленном конце

Перемещение незакрепленного конца получим после подстановки  $x = l$  в соотношении (1.6.14)

$$u_{x=l} = \frac{8lQ}{\pi^2 a^2 \rho S} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^2} \left( 1 - \cos \frac{i\pi at}{2l} \right). \quad (1.6.17)$$

Бесконечный ряд (1.6.17) отличается от (1.6.3) только слагаемым в виде числового ряда

$$\sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Поэтому графическое представление решения (1.6.17) отличается от предыдущего лишь сдвигом на величину статического удлинения  $\varepsilon_0 l$ , а замечания по поводу парадоксов предыдущего решения остаются в силе и в этом случае.

### 1.6.3. Колебания при внезапной остановке одного конца стержня, движущегося с постоянной скоростью

Эта задача интересна тем, что по сути дела представляет собой упрощенную аналогию знаменитой задачи о гидравлическом ударе, но только в недеформируемой трубе и в приложении к упругому стержню. Физическая интерпретация задачи выглядит так. Длинный стержень движется с постоянной скоростью  $v$ . В момент времени  $t = 0$  задний конец его (рис. 1.7) мгновенно останавливается. Если скорости  $v$  придать отрицательное значение, то ситуацию можно представить, как мгновенную остановку переднего конца, и в этом случае упругий стержень ведет себя подобно жидкости в недеформируемой трубе.

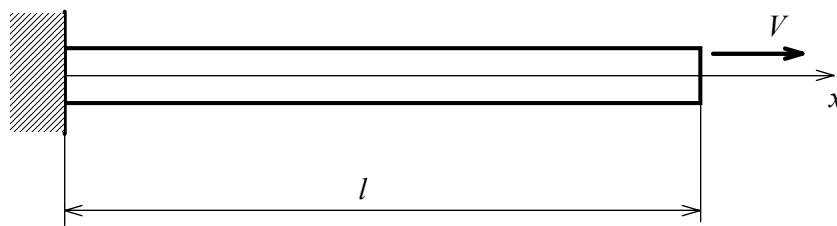


Рис.1.7. К расчету колебаний при внезапной остановке одного конца стержня, движущегося с постоянной скоростью  $v$

Начальные и граничные условия, согласно [12, стр. 330] имеют вид

$$\begin{aligned} u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v, \\ u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0, \end{aligned} \quad (1.6.18)$$

а решение выглядит так:

$$u = \frac{8vl}{\pi^2 a} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^2} \sin \frac{i\pi x}{2l} \sin \frac{i\pi at}{2l}. \quad (1.6.19)$$

После подстановки в (1.6.19)  $x = l$  находим перемещение свободного конца

$$u_{x=l} = \frac{8vl}{\pi^2 a} \left( \sin \frac{\pi at}{2l} - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi at}{2l} + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi at}{2l} + \dots \right). \quad (1.6.20)$$

Согласно [21, стр. 80] сумма ряда в скобках составляет  $\pi^2 at/8l$  для промежутка  $-l/a \leq t \leq l/a$  и поэтому  $u_{x=l} = vt$ .

В [12, стр. 331] приведено и выражение для деформации закрепленного конца

$$\varepsilon = \left( \frac{du}{dx} \right)_{x=0} = \frac{4v}{\pi a} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{i} \sin \frac{i\pi at}{2l} = \frac{v}{a} \quad (1.6.21)$$

и там же [12, стр. 92, 310] показано графическое изображение такой функции (рис 1.8). Однако, физическая бессмысленность (1.6.21), как и (1.6.20), почему-то ускользнула из поля зрения авторов [12].

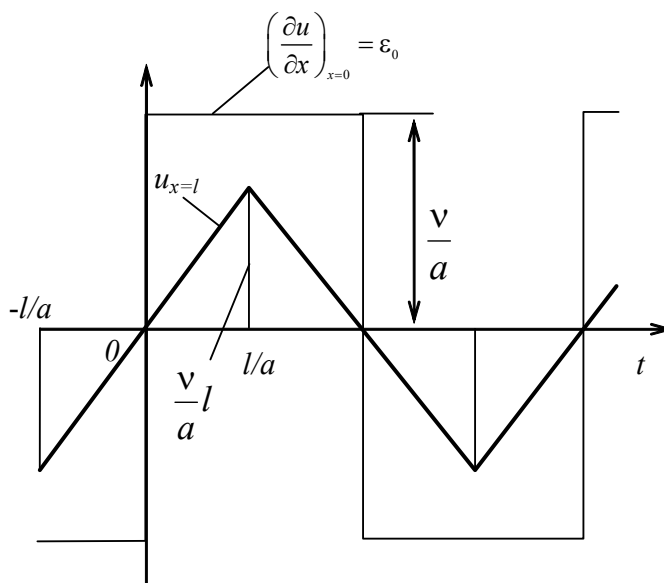


Рис.1.8. Графическое изображение функций:  $a$  – перемещение свободного конца стержня;  $b$  – деформация на закрепленном конце

В данной задаче, как и в предыдущих, начальные и граничные условия тоже не согласованы. И действительно, первое граничное условие  $u(0,t) = 0$  противоречит второму начальному условию,

поскольку после дифференцирования по времени  $t$  должно быть  $\partial u / \partial t(0, t) = v$ , а не нуль.

#### 1.6.4. Задача о продольном ударе по свободному концу стержня

Эта задача рассматривается в учебном пособии [19, стр. 88-91] и по характеру тех бессмысленных следствий, которые вытекают из ее решения, является наиболее показательной. Поэтому мы сразу же, без анализа начальных и граничных условий, приведем ее решение в соответствии с [19]

$$u = -\frac{4P}{\pi a \rho S} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \sin \frac{(2k+1)\pi a t}{2l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}, \quad (1.6.22)$$

где  $P$  – импульс силы.

Нетрудно заметить, что (1.6.22) представляет собой знакопостоянный ряд с коэффициентами его членов в виде дроби с нечетными числами в знаменателе.

В [19] приведено также и выражение для перемещения конца стержня, т.е. для случая  $x = l$

$$u_{x=l} = -\frac{4P}{\pi a \rho S} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\sin(2k+1)\pi a t / 2l]}{2k+1}. \quad (1.6.22, a)$$

С этим рядом мы уже встречались в (1.6.21) и, поскольку его сумма равна  $\pi/4$ , то

$$u_{x=l} = -\frac{P}{a \rho S}, \quad (1.6.23)$$

а с учетом периодического продолжения вид этой функции показан на рис. 1.9, т. е. перемещение конца стержня согласно (1.6.22) происходит по закону П-образного синуса и, таким образом, его положение меняется скачком с частотой  $a/2l$ .

Если мы захотим из (1.6.22) получить выражение для скорости или для деформации, то дифференцируя это выражение по  $t$  или по  $x$ , получим расходящиеся ряды, поскольку коэффициенты их членов равны единице.

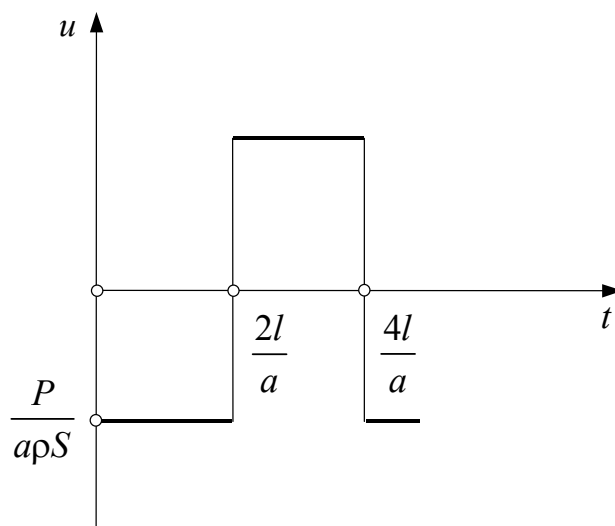


Рис. 1.9. Графическое изображение закона движения конца стержня  $u(l, t)$

По сравнению с предыдущими примерами, данное решение еще более обоснованно можно назвать абсурдным, поскольку при определении ускорения  $\partial^2 u / \partial t^2$  получим расходящийся ряд с возрастающими коэффициентами в виде нечетных чисел 1, 3, 5...

#### 1.6.5. О нарушении принципа суперпозиции частных решений

Принцип суперпозиции (сложения) простых гармонических колебаний с целью получения результирующего сложного движения, как известно [25, стр. 154], был выдвинут Бернулли Д. В [6, стр. 92] по поводу этого принципа доказана лемма следующего содержания: «если функции  $u_i (i = 1, 2 \dots n)$  являются частными решениями линейного однородного дифференциального уравнения, то ряд  $u \sum_{i=0}^{\infty} c_i u_i$  является

также решением этого уравнения, если вычисление производных от  $u$ , фигурирующих в уравнении, можно совершить при помощи почленного дифференцирования ряда».

Как вытекает из анализа решений, рассмотренных в п. п. 1.6.1–1.6.4, возможность почленного дифференцирования исключается при вычислении вторых производных, а в п. 1.6.4 даже при вычислении первой. По этому поводу авторы [6, стр. 88] делают вывод: «если

функция, определенная этим рядом, не является дифференцируемой, то он, конечно, не может представлять решение нашего дифференциального уравнения». На самом же деле все решения, полученные методом Фурье, основаны именно на применении принципа суперпозиции.

Рассуждения о принципе суперпозиции в колебательных системах обычно связаны с возможностью получения результирующего движения путем сложения простейших гармонических движений. Может быть поставлена и обратная задача о разложении сложного движения на простейшие гармонические. В первом случае, очевидно, речь идет о суммировании тригонометрического ряда, а во втором – о разложении функции в ряд. Однако при решении уравнений движения принцип суперпозиции, как следует из цитированной выше математической леммы, следует понимать в более широком смысле, а именно: для его соблюдения необходимо, чтобы не только результирующие перемещения, но также скорости и ускорения этих перемещений можно было получить путем сложения скоростей и ускорений простейших гармонических движений. С физической точки зрения такое требование выглядит вполне закономерным. И тем не менее, анализируя рассмотренные выше задачи, мы видим, что в первых трех из них нельзя таким способом получить результирующего ускорения, а в четвертой – ни ускорения, ни скорости.

#### **1.6.6. Сомнительный «парадокс» отсутствия решений при резонансе**

В учебном пособии [13, стр. 233] утверждается, что «недостатком... уравнений..., соответствующих классической теории упругости, является отсутствие их решений при резонансе». Для такого утверждения имеются серьезные основания, поскольку во всех учебных курсах [6, 8, 13, 19] и даже в классическом труде [12] таких решений действительно нет. В то же время для дискретных систем [12, стр. 60] известны и хорошо исследованы не только резонансные, но и решения для случая биений и, казалось бы, заменив систему с распределенными параметрами дискретной системой, путем предельного перехода такие решения в общем-то можно было бы получить. Поэтому, вероятно, процитированное выше положение следует считать сомнительным. Отсутствие таких решений еще не означает, что их нельзя получить

вообще. Однако этот вопрос требует самостоятельного глубокого анализа и будет изложен во второй части пособия.

### **1.6.7. Характерные признаки парадоксальных решений, полученных методом Фурье**

После изучения п. 1.6 мы, очевидно, приходим к выводу, что среди необозримого множества задач, решения которых получены методом Фурье, есть немало таких, что требуют пересмотра, поскольку содержат уже известные нам парадоксы и даже абсурды. Для реализации на практике подобного пересмотра при минимальных затратах труда желательно, с целью быстрого распознавания таких решений, установить их отличительные признаки. Нетрудно заметить, что наиболее характерными и удобными для распознавания возможных парадоксов являются коэффициенты тригонометрических рядов, которыми представлены решения задач.

Коэффициенты ряда, которым представлено решение, обычно содержат номер соответствующего члена  $i$  в той или иной степени. Если коэффициенты представлены в виде дроби с множителями вида  $1/i^2, 1/i$ , то решения с подобными множителями принадлежат к числу парадоксальных и, разумеется, подлежащих пересмотру. Основанием для такого вывода, является то, что после дифференцирования ряды, представляющие решение, становятся расходящимися: в первом случае после повторного, а во втором после первого вычисления производной.

Встречаются также задачи, в которых коэффициенты ряда представлены более сложными выражениями. Например, в решении задачи о колебаниях стержня с грузом на конце они тоже зависят от номера члена, но определяются из трансцендентного уравнения [19, стр. 91–99 и др.]. Оценка таких коэффициентов после дифференцирования ряда несколько сложнее, чем в предыдущих случаях, но все же вполне реальна. При значительных сложностях, связанных с оценкой коэффициентов, и при наличии несовместимости, разрывов или недифференцируемости требуемое число раз начальных или граничных условий решения следует отнести к разряду сомнительных.

Встречается множество задач, решения которых получены из дифференциальных уравнений четвертого порядка. К ним в основном относятся задачи о поперечных колебаниях стержня. Коэффициенты

членов ряда в таких случаях содержат множители  $1/i^4, 1/i^3$ . Подобного рода решения, очевидно, следует считать неприемлемыми, поскольку после первого дифференцирования по  $t$  эти множители становятся равными  $1/i^2, 1/i$ , а после второго соответственно  $1, i$ , и поэтому почленное дифференцирование ряда окажется недопустимым.

Аналогичные оценки сходимости рядов Фурье, хотя и в случае функции одной переменной, но, тем не менее, представляющие большой интерес для будущих научных работников, можно найти и в известной монографии [23, стр. 165–166].

### **1.6.8. Контрольные вопросы**

#### ***Задача о свободных колебаниях стержня***

1. Укажите на математическое противоречие в формулировании начальных и граничных условий задачи о свободных колебаниях стержня.
2. Укажите на физические противоречия, вытекающие из анализа графического изображения закона движения конца стержня.
3. Покажите, чему равны скорость и ускорение конца стержня, исходя из анализа графического изображения закона движения его конца.
4. Можно ли определить ускорение конца стержня из выражения  $\partial^2 u / \partial t^2$  путем почленного дифференцирования функции  $u(x, t)$ , заданной согласно (1.6.2)?
5. Как выглядит графическое изображение деформации (нагрузки) закрепленного конца стержня? Укажите на физические противоречия.
6. Покажите, какие противоречия снимаются и какие появляются, если вместо точного решения воспользоваться приближенным (за счет одной гармоники)?
7. Запишите решение задачи, полученное из представления Даламбера, и сформулируйте следствия, которые из него вытекают.
8. Опишите традиционный способ перехода от решения в форме Даламбера к решению в форме Фурье. Укажите на физические и математические недоразумения такого перехода.

#### ***Задача о вынужденных колебаниях стержня***

9. Укажите на противоречия в формулировании начальных и граничных условий данной задачи.

10. При какой очередности преобразований (1.6.15) можно удовлетворить второму граничному условию (1.6.13)?
11. Укажите на физические противоречия при анализе графического изображения закона движения незакрепленного конца стержня.
12. Укажите на физические противоречия при анализе нагружения закрепленного конца стержня.
13. Какие противоречия в решении предыдущей задачи присущи рассматриваемому случаю?

#### ***Вопросы к п. п. 1.6.4–1.6.6***

14. Укажите на признаки абсурда в решении задачи о продольном ударе стержня.
15. Кто впервые выдвинул принцип суперпозиции движений?
16. Сформулируйте математическую лемму о принципе суперпозиции частных решений дифференциального уравнения.
17. Укажите, каким положениям леммы о суперпозиции частных решений противоречат следствия, вытекающие из решений рассмотренных задач.
18. Дайте физическое толкование принципа суперпозиции частных решений волнового уравнения.
19. Поясните, почему содержащееся в учебной литературе утверждение об отсутствии решений уравнений классической теории упругости при резонансе следует считать сомнительным.

### ***1.7. Исторические корни математических парадоксов и физически бессмысленных точных решений классических задач***

Ключ к объяснению упомянутых выше математических недоразумений, по-видимому, следует искать прежде всего в особенности поведения рядов Фурье на границах области сходимости, где исходная функция и представляющий ее ряд иногда, особенно с учетом явления Гиббса [24, стр. 494–497], имеют различные значения. К сожалению, на это обстоятельство почему-то очень редко обращают внимание. В результате, как мы уже видели, решения многих задач, полученные методом Фурье, оказались фактически непригодными для практического применения. Несогласованные, т. е. фактически разрывные, краевые условия, привели в нашем случае к своеобразному

динамическому решению, к которому, как почему-то оказалось, можно перейти и от статического решения (1.6.8). Этот переход выполнен общепринятым [6, стр. 95; 13, стр. 244], но, скорее всего, некорректным способом, без надлежащего анализа областей сходимости рядов и их производных, которые могут и не совпадать. С физической точки зрения подобный переход бессмысленный. Он в какой-то степени равносильен тому, когда точки неподвижного тела считают движущимися с двумя одинаковыми скоростями в различных направлениях, т. е.  $+v$  и  $-v$ . После разложения постоянных  $v$  и  $-v$  в бесконечные тригонометрические ряды по  $t$  с использованием различных формул [21, стр. 80] и в результате не всегда корректного перегруппирования и взаимного сокращения членов можно получить кажущееся колебательное движение  $v(t)$  с бесконечным количеством «собственных» частот. И, поскольку ряды Фурье для постоянной величины сходящиеся [21, стр. 80], то, отбросив высшие гармоники, увидим, что фактически фиктивный колебательный процесс окажется вполне правдоподобным. Примечательно, что именно такого рода физические абсурды присущи решениям тех классических задач, при постановке которых принимались или несогласованные, или разрывные, или недифференцируемые требуемое число раз начальные условия. В этом перечне находится большинство задач о колебаниях струны, стержня, мембраны.

Возникает законный вопрос: почему же все-таки в упомянутых задачах нарушено, а, может быть, и проигнорировано общепринятое с незапамятных времен правило о непрерывности и дифференцируемости требуемое число раз функций, используемых для описания начальных и граничных условий. Причем в некоторых современных учебных пособиях это правило считается необязательным [19, стр. 43], а решения, найденные в таких случаях, получили название обобщенных [6, стр. 63], хотя хорошо известно [6, стр. 63, 88], и это мы уже видели на примере (1.6.8), что решения в классическом смысле не существуют. Что же касается обобщенных решений, а в рассмотренных в п. п. 1.6.1–1.6.4 примерах они действительно являются таковыми, то их наглядная физическая интерпретация с соответствующими комментариями уже продемонстрирована на рис. 1.4, 1.6, 1.8. Но, к сожалению, эта картина ранее никем не была замечена (а может быть, только не освещена в публикациях), и поэтому рассмотренные выше решения, причисленные

к разряду точных, заняли первые места среди типовых учебных задач, как классические.

Причина создавшегося положения имеет глубокие исторические корни, уходящие к середине 18 века, и связана с фактически незавершенным длительным «спором о струне» между Даламбером и Эйлером [25, стр.150–155]. К этой дискуссии в дальнейшем подключились Бернулли Д. и Лагранж. «Даламбер считал, что при произвольной начальной форме струны решать задачу нельзя: требуется гладкость струны, ввиду того что решение должно быть дважды дифференцируемым» [25, стр.151]. Эйлер не соглашался с Даламбером относительно произвольных функций, входящих в решение уравнения (имеется в виду (1.4.7)). Он рассуждал так: начальная форма струны может быть любой, представлять кривую, начерченную «свободным влечением руки», поэтому можно задавать начальное положение не одним, а несколькими выражениями и даже разрывной функцией [25, стр. 150].

Такие взаимоисключающие точки зрения Даламбера и Эйлера в конечном итоге привели к тому, что в современной учебной литературе появились несовместимые выводы, процитированные ниже, а именно: «функция  $u(x, t)$ ... только тогда будет решением уравнения, когда у нее существуют вторые производные по  $x$  и по  $t$ . Для этого функция  $u(x, 0) = f(x)$  должна иметь вторую производную, а функция  $\partial u / \partial t(x, 0) = F(x)$  – первую. Между тем часто приходится рассматривать задачи, в которых функции  $f(x)$  и  $F(x)$  не удовлетворяют указанным условиям... Во всех таких случаях функцию  $u(x, t)$ ... мы все равно считаем решением задачи... Учитывая это замечание, мы в дальнейшем при рассмотрении примеров никогда не будем требовать, чтобы начальные условия обязательно удовлетворяли условиям непрерывности и дифференцируемости» [19, стр. 42–43]. Аналогичное, хотя и менее категоричное суждение по этому поводу имеется в работе [6, стр. 63]. Такого рода сомнительные выводы в авторитетных учебных пособиях нельзя, однако, относить исключительно на счет авторов этих пособий, поскольку они, вероятно, сформировались на протяжении столетий и отражают попытку нескольких поколений математиков объединить полярные точки зрения своих выдающихся предшественников – Даламбера и Эйлера. К чему такая попытка в

конечном итоге привела, мы уже видели на наглядных примерах, представленных в п. п. 1.6.1–1.6.4.

С учетом изложенного, напрашивается очевидный вывод о необходимости пересмотра так называемых точных решений многочисленных классических задач, что в большинстве случаев означает иную, более корректную, их постановку, а фактически – и решение совершенно новых задач.

### **Список использованной литературы**

1. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. – Изд-во Моск. ун-та, 1971.–247 с.
2. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т.1. Учебник для университетов.– М.: Наука, 1970.– 492 с.
3. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. Пер. с англ. – М.: Мир, 1975.– 592 с.
4. Гольденблат И. И. Некоторые вопросы механики деформируемых сред.– М.: Гостехтеориздат, 1955.– 271 с.
5. Кильчевский Н. А. Курс теоретической механики, т. 2. Учебное пособие для университетов.– М.: Наука, 1977.– 544 с.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Учебное пособие для университетов.– М.: Наука, 1972.— 736 с.
7. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. Учебник для вузов.– М.: Высшая школа, 1968.– 512 с.
8. Бабаков И. М. Теория колебаний. Учебное пособие для вузов.– М.: Наука, 1968.– 560 с.
9. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические волны в упругих телах.– К.: Наукова думка, 1981.– 284 с.
10. Гузь А. Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости.– К.: А.С.К., 1998.– 350 с.
11. Тимошенко С. П. Курс теории упругости.– К.: Наукова думка, 1972.– 507 с.
12. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. Пер. с англ.– М.: Машиностроение, 1985.– 472 с.
13. Василенко Н. В. Теория колебаний. Учебное пособие для вузов.– К.: Вища школа, 1992.– 430 с.
14. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. Учебное пособие для университетов.– М.: Наука, 1979.– 744 с.
15. Борисенко А. Н., Тарапов Н. Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. Учебное пособие для вузов.– Харьков: Изд-во Харьк. ун-та.– 1972.– 255 с.
16. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2. Пер. с нем.– Л.– М.: ОНТИ, 1937.– 998 с.
17. Ватсон Дж., Н. Курс современного анализа, ч.2. Пер. с англ.–М.:Физматгиз, 1963.–516с.
18. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1. Учебное пособие для университетов и пединститутов.– М.: Наука, 1969.– 608 с.
19. Араманович Н. Т., Левин В. И. Уравнения математической физики. Учебное пособие для вузов.– М.: Наука, 1969.– 288 с.
20. Козачок А. А. Парадоксы классических решений волнового уравнения. Вестник НТУУ «КПИ», «Машиностроение», 2000.– Вып. 38, т. 2.– с. 124-133.

21. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Пер. с англ.– М.: Наука, 1966.–228 с.
22. Будаг Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. Учебное пособие для университетов.– М.: Наука, 1972.– 688 с.
23. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. Учебное пособие для втузов.– М.– Л.: Гостехтеориздат, 1959.– 400 с.
24. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3. Учебное пособие для университетов и педагогических институтов.– М.: Наука, 1969.– 656 с.
25. Никифоровский В. А. Великие математики Бернулли.– М.: Наука, 1984.– 177 с.
26. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошной среды.– М.: Гостехтеориздат, 1954.–795 с.
27. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики.– М.: «Наука», 1975.– 288 с.
28. Козачок А. А., Парадоксальные особенности фундаментальных классических уравнений динамики деформируемых сред. Вестник НТУ «ХПИ», 2001.– Вып. 129, т. 1, с. 272–283.
29. Козачок А. А. Сомнительные принципы подхода к отождествлению переменных Эйлера и Лагранжа в динамике деформируемых сред. Вестник НТУУ «КПИ», 2002, «Машиностроение»,– Вып. 42, т. 1, с. 50-53.

## **Часть 2. Новые подходы к постановкам и решения некоторых классических задач для волнового уравнения**

*В истории развития физики наиболее интересны как раз те моменты, когда приходится пересматривать фундаментальные научные концепции. и для этого ученым требуется не только ум и интуиция, но и смелое воображение.*

**П.Л.Капица**

*Стремление к истине ценнее, дороже уверенного обладания ею.*

**Лессинг**

### **2.1. Невероятные физические недоразумения традиционных математических постановок классических задач о колебаниях упругих тел**

#### **2.1.1. Вводные замечания**

Аналогии разнообразных волновых движений, наблюдаемых в повседневной практике, заслуженно занимают прочное место в формировании научных представлений о характере распространения волн в упругих средах. При этом хорошо известно [1], что передний фронт упругой волны движется с определенной скоростью  $a$ , именуемой скоростью звука в данной среде. Такие, вполне правдоподобные представления, казалось бы, должны привести к выводу, что при математической постановке задачи о распространении волн в ограниченном объеме вначале необходимо рассматривать две, принципиально отличающиеся по условиям нагружения, области среды – возмущенную и невозмущенную. Подобные постановки относятся к ряду чрезвычайно сложных задач о деформировании взаимодействующих упругих тел и с подвижными границами, и с переменной массой. Поэтому исходные уравнения, а также начальные и

граничные условия, должны формулироваться для связанных упругих полей переменных масс возмущенной (динамической) и невозмущенной (статической) областей. На самом же деле при математической постановке многих таких задач, ставших уже классическими и вошедших в учебники, почему-то сложилась труднообъяснимая ситуация. В научной и в учебной литературе в общем-то не отрицается, а даже подчеркивается [1, 3] упомянутая выше картина распространения возмущений. И тем не менее, там же [2, 3 и др.] упущена из виду необходимость учета этой картины путем обособленного рассмотрения возмущенной области, расширяющейся за счет присоединения массы из невозмущенной.

### **2.1.2. Правдоподобные физические предпосылки, несовместимые математические постановки и бессмысленные решения некоторых классических задач**

В качестве иллюстрации упомянутых в п. 2.1.1 труднообъяснимых недоразумений между непротиворечивыми физическими представлениями и бессмысленными математическими постановками рассмотрим простейшую классическую задачу, с незапамятных времен занявшую прочное место в учебных пособиях по математической физике, теории колебаний и т.п. [1–4]. Это задача о свободных продольных колебаниях однородного призматического стержня длиной  $l$  с одним закрепленным концом  $x=0$  (рис. 2.1). В статическом состоянии стержень имеет начальную деформацию  $\varepsilon_0$  за счет действия постоянной продольной силы  $Q = \text{const}$ , и поэтому в качестве начальных условий принимают, что перемещения  $u(x,0) = \varepsilon_0 x$ , а скорости  $\dot{u}(x,0) = 0$ . Таким образом, статическая форма, существующая только при наличии силы  $Q = \text{const}$ , принудительно навязывается динамической системе. Эта форма фактически отождествляется с начальной формой, которая в режиме свободных колебаний линейной системы, по-видимому, должна периодически повторяться. В момент мгновенного прекращения действия силы  $Q$  освобожденный конец приходит в движение, а закрепленный остается неподвижен. Поэтому в качестве граничных условий принимают  $u(0,t) = 0$ ,  $\partial u / \partial x(l,t) = 0$ . Однако почему-то упускают из виду возникающее противоречие, поскольку согласно начальному условию  $\partial u / \partial x(x,0) = \varepsilon_0$ . К тому же

прекращение действия силы  $Q$  нарушает статическую картину. При этом бесконечно малый элемент свободного конца стержня сразу же приобретает начальную скорость  $\dot{u}_H(l,0) \neq 0$  за счет уменьшения деформации  $\partial u / \partial x(l,0)$  от  $\varepsilon_0$  до 0. Вся остальная часть стержня остается неподвижной, но предварительно нагруженной, при наличии на конце частично разгруженной, т.е. возмущенной, области, длина которой постоянно увеличивается. В момент времени  $t_H + dt$  длина этой области может быть определена из условия  $dl_* = a dt$ . Если скорость фронта волны разгрузки  $a$  постоянна, то длина  $l_*$  разгруженной части стержня в момент времени  $t$  определяется как  $l_* = at$ .

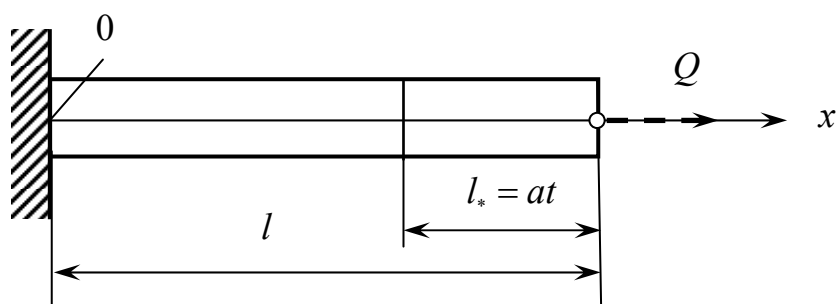


Рис. 2.1. К пояснению постановки задачи о свободных колебаниях стержня

Таким образом, казалось бы, для корректного решения задачи необходимо рассматривать колебательный процесс возмущенной части стержня переменной длины  $l_* = at$ . При этом к концу стержня непрерывно со скоростью звука  $a$  присоединяются предварительно нагруженные частицы, принадлежавшие ранее его неподвижной части. Игнорирование такой очевидной, причем общепринятой [1, 3], физической картины привело к несовместимости начальных и граничных условий. В конечном итоге было получено и физически бессмысленное решение, особенности которого подробно рассмотрены в [5, 6] и выше в первой части пособия.

Для иллюстрации упомянутых выше недоразумений между бесспорными физическими представлениями и несоответствующими им математическими постановками рассмотрим еще одну из наиболее простых классических задач, которая используется в разных учебниках,

например, по математической физике [7, стр. 64]. Имеется в виду задача о свободных колебаниях струны.

Упомянутая выше задача решена при условиях, когда начальное отклонение струны вместе с ней образует форму равнобедренного треугольника (рис. 2.2), а начальная скорость равна нулю. Таким образом, функции, которые описывают эти условия, имеют вид

$$u(x,0) = \frac{2hx}{l}, \text{ если } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}; \quad u(x,0) = \frac{2h(l-x)}{l}, \text{ если } \frac{l}{2} \leq x \leq l,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad \left( \frac{u}{l} \ll 1 \right). \quad (2.1.1)$$

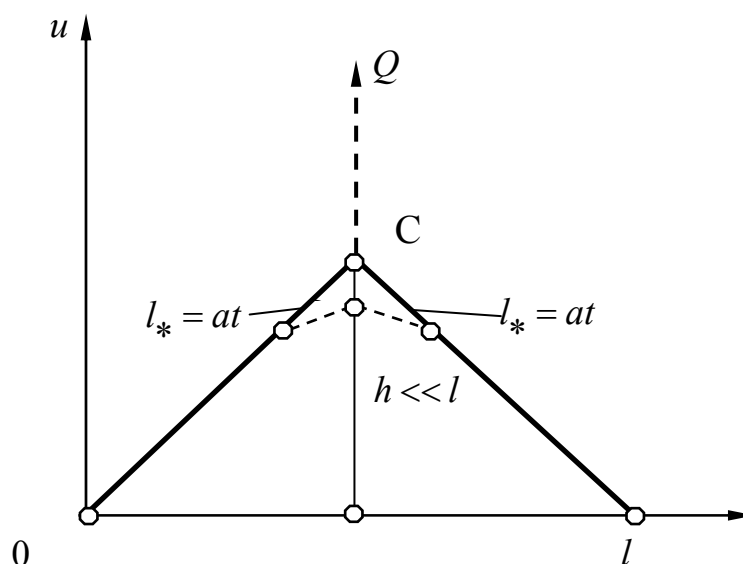


Рис. 2.2. Начальное отклонение струны

Анализируя начальные условия согласно (2.1.1), нужно отметить, что они возможны только тогда, когда в точке  $C$ , то есть посередине струны, действует постоянная вертикальная сила  $Q$  (рис.2.2), и потому эти условия характеризуют именно статическую форму струны. В этом случае на любую из сторон треугольника, созданного отклоненной с помощью силы  $Q$  струной, действует постоянная продольная сила, которая определяется по правилу параллелограмма. Тогда статические напряжения (деформации) каждого участка струны будут одинаковыми

по всей ее длине. Но в момент мгновенного прекращения действия силы  $Q$  статическая картина нарушается, а вершина треугольника  $C$  приходит в движение с какой-то начальной скоростью в сторону, противоположную действию силы  $Q$ . Благодаря этому вершина становится притупленной, а растянутые стороны треугольника постепенно разгружаются, образуя возмущенные участки, длина которых  $l_* = at$  (рис. 2.2). Процесс возмущения проходит со скоростью звука  $a$  и длится, пока волна постепенной разгрузки по длине каждой стороны не достигнет закрепленных концов струны  $x = 0$ , и  $x = l$ .

Как видим, статические начальные условия, хотя и отображают реальное нагружение перед началом колебательного процесса, но не учитывают того, что этот процесс охватывает струну постепенно и возникает только в возмущенном участке струны, границы которого, т.е.  $l_* = at$ , расширяются со скоростью звука.

Таким образом, принудительно навязывая статические начальные условия согласно (2.1.1), которые не имеют ничего общего с реальными, когда волны разгрузки достигнут концов струны, мы вынуждаем динамическую систему эти статические условия периодически повторять.

Нетрудно заметить, что при постановке этой задачи, в противоположность рассмотренным в [5, 6], начальные и краевые условия согласованы, однако функция, которая характеризует начальное отклонение струны, хотя и непрерывная, но имеет разрывную, а точнее неоднозначную, производную по  $x$  в точке  $C$ , поскольку  $\partial u / \partial x(l/2, 0) = \pm 2h/l$ . А это и есть основанием, в соответствии с общеизвестными требованиями [7, стр. 63], считать сомнительным существование классического решения, хотя такое решение и приводится в учебных пособиях, например [7, стр. 65], и для линейного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \bar{a}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \bar{a}^2 = \frac{T_n}{\rho} \quad (2.1.2)$$

имеет вид

$$u(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l} \cos \frac{(2n+1)\pi \bar{a} t}{l}, \quad (2.1.3)$$

где  $T_n$  – начальное натяжение струны;  $\bar{\rho}$  – погонная плотность струны.

Если с целью расчета величины ускорения  $\partial^2 u / \partial t^2$  или для проверки правильности решения (2.1.3) осуществить его почленное дифференцирование, то, как и в задачах, рассмотренных в [5, 6] и в первой части пособия, получим расходящиеся ряды, поскольку коэффициенты их членов будут равняться единице. Таким образом, классический принцип суперпозиции частных решений (см. п. 1.6.5), который требует обязательной сходимости указанных рядов [8, стр. 92], нарушается. Расхождение второй производной ряда (2.1.3), как известно [8, стр. 88], не разрешает считать его и решением уравнения (2.1.2).

### **2.1.3. Сомнительные физические предпосылки традиционных постановок задач о распространении локальных возмущений в упругих средах**

Весьма показательной в плане рассмотренных в п. 2.1.1 недоразумений является задача о распространении локальных возмущений в струне. Движения такого типа обычно подразделяют на волны отклонения и волны импульса [7, стр. 37–51]. Решая подобные задачи методом характеристик [7, стр. 55], иногда полагают, что локальное отклонение струны, например, в виде равнобедренного треугольника или синусоиды разделяется на две одинаковые формы такого же вида (рис. 2.3, а), но в два раза меньшей площади. Указанные формы движутся в разные стороны вдоль струны со скоростью  $\bar{a}$  и почему-то вызывают лишь местное отклонение. При таком представлении решения струна бесконечной длины остается в покое за исключением двух взаимно удаляющихся со скоростью  $\bar{a}$  (причем  $\bar{a}$  – это не скорость звука!) локальных возмущений неизменной формы. Такого рода представления, в т.ч. и в теории ударных волн [3, стр. 406], хотя, очевидно, и заимствованы из окружающей действительности, но соответствуют они не упругим волнам, а волнам другой природы, распространяющимся в диссипативных средах. Например, это волны,

распространяющиеся на водной поверхности, причем, благодаря не упругим силам, а силам веса.

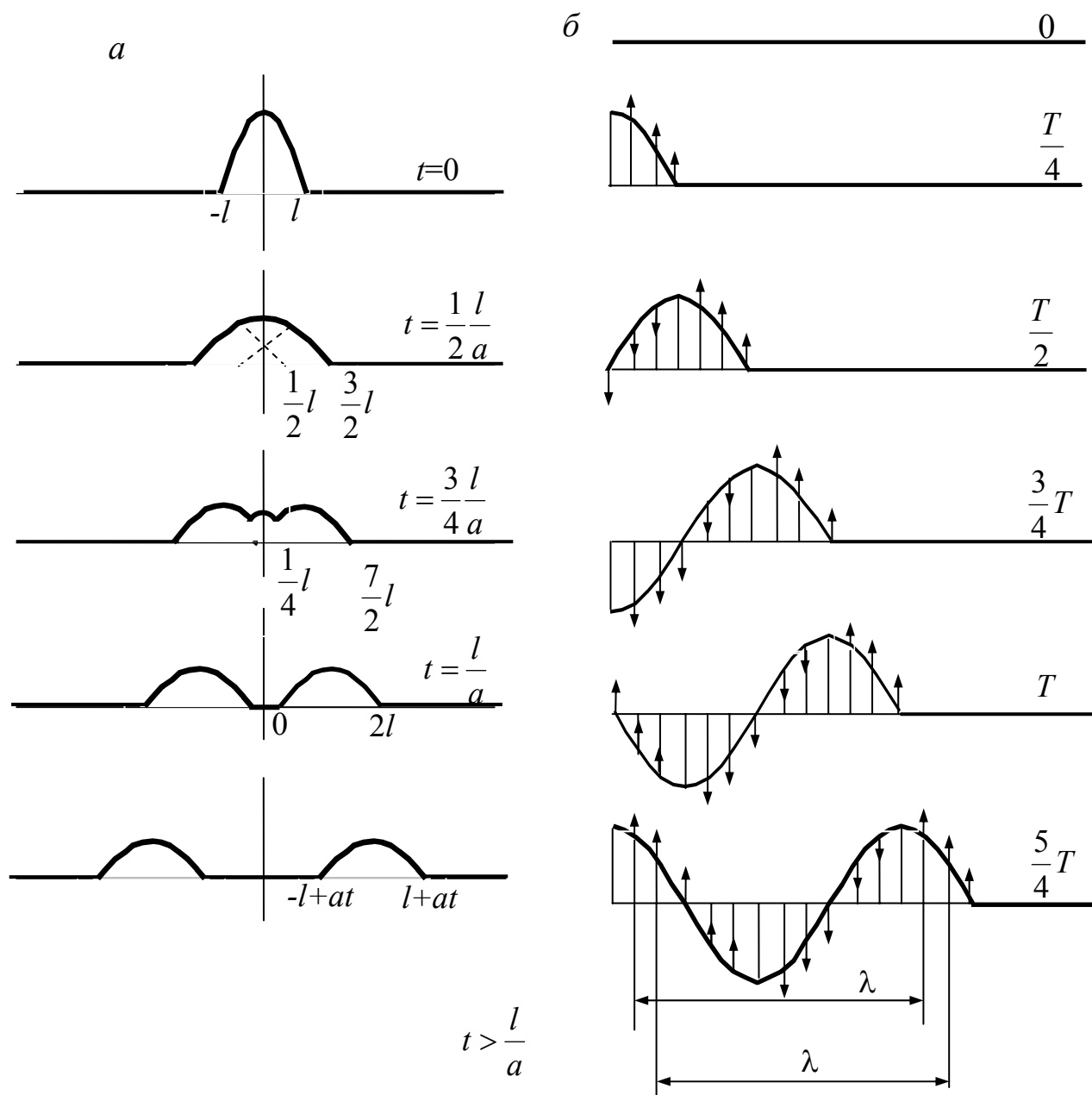


Рис. 2.3. Взаимоисключающие представления о распределении локальных возмущений: *a*– в курсах математической физики [4,7,8 и др.]; *б* – в учебниках физики для средней школы и в [9];

Ошибочность упомянутых выше представлений о распространении волн в упругом теле можно пояснить хотя бы тем, что они базируются на сомнительном предположении об отсутствии расширяющейся возмущенной области из-за мгновенной остановки отклоненных частиц после возвращения их в исходное положение, соответствующее натянутой струне. На самом же деле в идеально упругом теле возмущения распространяются со скоростью звука и после прохождения возмущения через какую-либо точку за его задним фронтом возникает незатухающий колебательный процесс. И хотя в учебных пособиях по физическим основам механики, например [9, стр. 200–201] и даже в учебниках физики для средней школы уже сформулированы именно такие представления (рис. 2.3, б), в курсах же математической физики [4, 7 и др.] а также других университетских дисциплин все еще почему-то господствуют прежние, противоречащие физическому смыслу, взгляды о неизменной форме локальных возмущений в идеально упругом теле согласно рис. 2.3, а.

#### **2.1.4. Краткие выводы**

Таким образом, следует отметить, что физически бессмысленные решения многих классических задач, примеры которых рассмотрены в [5,6], обусловлены несовместимыми с общепринятыми представлениями о распространении упругих волн математическими постановками. Такие постановки фактически представляют собой принудительное навязывание заведомо колебательной системе по сути статической начальной формы, от которой линейная система не способна самостоятельно освободиться. В лучшем случае эти решения в результате некорректных математических преобразований и благодаря процедуре искусственного продолжения лишь периодически повторяют первоначально заданную статическую форму, а после разложения в ряд Фурье создают обманчивую видимость наличия множества гармоник, хотя на самом деле противоречат принципу суперпозиции частных решений.

#### **2.1.5. Контрольные вопросы**

1. С какой скоростью распространяются возмущения в упругой среде?

2. В каком направлении перемещается граница между возмущенной и невозмущенной областями упругой среды?
3. Почему задачи о распространении возмущений следует относить к задачам о взаимодействующих упругих телах и с подвижными границами, и с переменными массами?
4. Укажите на противоречия в начальных и граничных условиях в классической задаче о свободных колебаниях стержня после устранения удерживающей силы на его незакрепленном конце.
5. Опишите процесс распространения возмущения в стержне после устранения удерживающей силы на его незакрепленном конце.
6. Запишите формулу, позволяющую определить длину возмущенной части стержня.
7. Укажите на противоречия в начальных и граничных условиях в классической задаче о свободных колебаниях струны после устранения удерживающей силы. Начальное отклонение принять в виде равнобедренного треугольника.
8. Опишите фактический процесс распространения возмущений в струне после устранения удерживающей силы. Начальное отклонение принять в виде равнобедренного треугольника.
9. Как определить время распространения возмущения до закрепленного конца стержня?
10. Как определить время распространения возмущения до закрепленных концов струны при ее начальном отклонении в виде равнобедренного треугольника?
11. Почему традиционные начальные условия для свободных колебаний стержня или струны следует рассматривать как статические и не соответствующие действительности?
12. Почему традиционные начальные условия для задачи о свободных колебаниях стержня противоречат классическим требованиям?
13. Как реагирует математическая модель линейной динамической системы на заданные статические начальные условия?
14. Как проявляется нарушение принципа суперпозиции при нарушении классических требований к формулированию начальных условий?
15. Почему традиционные физические предпосылки в классических задачах о распространении локальных возмущений в упругих телах являются ошибочными? Поясните это на рис. 2.3,б из курса физики.

## **2.2. Очевидный упрощенный подход к постановке и решение задачи о свободных колебаниях струны**

### **2.2.1. Предварительные замечания**

В п. 2.1.2. показано, что точное решение известной классической задачи о свободных колебаниях струны имеет такие же недостатки, как и другие задачи, вошедшие в учебники и подробно рассмотренные в первой части учебного пособия. Избежать появления таких недостатков можно лишь путем корректных постановок этих задач с учетом современных физических представлений о распространении волн в упругой среде. Однако такой подход требует чрезвычайно сложных математических постановок применительно к связанным упругим телам и с подвижными границами, и переменными массами. Практическая реализация подобного подхода находится в зачаточном состоянии и поэтому невозможна без предварительных исследований. Ниже предлагается упрощенный подход, позволяющий избежать упомянутых в п. 2.1.2 и в [5] недоразумений при сохранении основной информации о реальной физической картине свободных колебаний струны.

### **2.2.2. Формулирование начальных условий**

Начнем рассмотрение колебаний струны с того момента, когда волна постепенной разгрузки достигает ее закрепленных концов, но еще не изменяет начального нагружения, а следовательно и угла отклонения, в конечных точках. Будем полагать, что именно в этот момент все частицы струны приходят в движение. При этом ее начальная треугольная форма (рис.2.2) уже успела трансформироваться и имеет вид, близкий к основной форме. Для такого предположения имеется достаточно оснований, поскольку начальное отклонение в виде равнобедренного треугольника при незначительных изменениях действительно очень легко превращается в синусоиду. Кроме того, весь предшествующий опыт свидетельствует, что основная форма в подобных задачах о свободных колебаниях, как правило, оказывается определяющей. Однако, выдвигая такое предположение на основе интуиции, мы пока еще не знаем ни величины перемещений, ни скорости движения. Поэтому и не можем определить количественные

показатели начальной формы, заданной в виде синусоиды. В связи с этим действительные начальные и граничные условия, содержащие пока неизвестные величины  $h_0$  и  $A$ , запишем так:

$$u(x,0) = h_0 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \dot{u}(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = A \sin \frac{\pi x}{l}, \quad u(0,t) = u(l,t) = 0. \quad (2.2.1)$$

Назовем первые два соотношения отсчетными начальными условиями. Учтем также, что согласно первому условию (2.2.1)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,0) = -\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{h_0 \pi}{l}. \quad (2.2.2)$$

Особо отметим, что эта величина остается такой же, как и во время действия силы  $Q$ , с помощью которой была отклонена струна

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t_n) = \frac{2h_{n0}}{l} \quad (0 \leq x \leq \frac{l}{2}), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x,t_n) = -\frac{2h_{n0}}{l} \quad (\frac{l}{2} \leq x \leq l). \quad (2.2.3)$$

Учитывая упомянутое и приравнявая соответствующие выражения, имеем

$$-\frac{\partial u}{\partial x}(l,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t_n) \Rightarrow \frac{h_0 \pi}{l} = \frac{2h_{n0}}{l} \Rightarrow h_0 = \frac{2h_{n0}}{\pi}. \quad (2.2.4)$$

Максимальное значение начальной скорости  $A$  определим, исходя из условия сохранения энергии для струны в целом

$$\Pi_n + \Pi_{n0} = \Pi_n + \Pi_0 + W_0 \Rightarrow \Pi_{n0} = \Pi_0 + W_0, \quad (2.2.5)$$

где  $\Pi_n$  – удельная потенциальная энергия предварительного натяжения;  $\Pi_{n0}$  – удельная потенциальная энергия начального отклонения за счет силы  $Q$ ;  $\Pi_0$  – удельная потенциальная отсчетного состояния;  $W_0$  – удельная кинетическая энергия отсчетного состояния.

Удельную потенциальную энергию начального отклонения струны, очевидно, можно записать в виде двух слагаемых, а именно:

$$\Pi_{n0} = \sigma_n \varepsilon_{n0} + \frac{1}{2} \sigma_{n0} \varepsilon_{n0} \quad (2.2.6)$$

где  $\sigma_n$  – начальное напряжение за счет силы предварительного

натяжения струны  $T_n$ ;  $\sigma_{n0}$  – напряжение, вызванное начальным отклонением струны;  $\varepsilon_{n0}$  – продольная деформация струны.

Первый член в (2.2.6) не содержит множителя  $1/2$  по следующей причине. В момент, когда начинается начальное отклонение струны, предварительное натяжение  $\sigma_n$  уже достигло своего конечного значения и в процессе отклонения остается постоянным. Что же касается второго члена, то он содержит множитель  $1/2$ , поскольку  $\sigma_{n0}$  достигает своего конечного значения одновременно с деформацией  $\varepsilon_{n0}$ , т.е. синхронно с деформацией изменяется в пределах  $0 - \sigma_{n0}$ .

Поскольку для упругой среды

$$\sigma_{n0} = E\varepsilon_{n0}, \quad (2.2.7)$$

то из (2.2.6) имеем

$$\Pi_{H0} = \left( \sigma_n + \frac{E\varepsilon_{n0}}{2} \right) \varepsilon_{n0}. \quad (2.2.8)$$

Используя приближенные соотношения (1.4.18), полученные при выводе уравнения колебаний струны в первой части пособия

$$\varepsilon_{n0} = 2 \sin^2 \frac{\alpha_{n0}}{2} \approx \frac{\alpha_{n0}^2}{2}, \quad (2.2.9)$$

и имея в виду, что согласно рис. 2.2.

$$\alpha_{n0} = \frac{2h_{n0}}{l}, \quad (2.2.10)$$

из (2.2.8) получим

$$\Pi_{n0} = 2 \left( \sigma_n + E \frac{h_{n0}^2}{l^2} \right) \frac{h_{n0}^2}{l^2}. \quad (2.2.11)$$

Среднее значение удельной потенциальной энергии для струны в целом в отсчетном состоянии по аналогии с (2.2.8) запишем так:

$$\Pi_0 = \frac{1}{2l} \int_0^l \left( \sigma_n + \frac{E\varepsilon_0}{2} \right) \varepsilon_0 dx, \quad (2.2.12)$$

Принимая во внимание общепринятые [7, 8] приближенные соотношения

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial y_0}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha_0 \approx \sin \alpha_0 \approx \alpha_0, \quad \varepsilon_0 = \frac{\alpha_0^2}{2}, \quad (2.2.13)$$

а также очевидные соотношения, вытекающие из (2.2.1)

$$u(x,0) = y_0 = h_0 \sin \frac{\pi x}{l} \Rightarrow \alpha_0 = \frac{\partial y_0}{\partial x} = \frac{h_0 \pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}, \quad (2.2.14)$$

после интегрирования (2.2.12) получаем

$$\Pi_0 = \frac{h_0^2 \pi^2}{4l^2} \left( \sigma_n + \frac{3Eh_0^2 \pi^2}{16l^2} \right). \quad (2.2.15)$$

Запишем теперь выражение среднего значения удельной кинетической энергии для отсчетного состояния

$$W_0 = \frac{\rho}{2l} \int_0^l \dot{u}^2(x,0) dx. \quad (2.2.16)$$

После подстановки выражения для  $\dot{u}(x,0)$  согласно (2.2.1) и интегрирования, получим

$$W_0 = \frac{A^2 \rho}{2l} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{1}{4} A^2 \rho. \quad (2.2.17)$$

Если теперь выражения для  $\Pi_{n0}, \Pi_0, W_0$  согласно (2.2.11) и (2.2.17), подставить в (2.2.5), то получим

$$2 \left( \sigma_n + E \frac{h_{n0}^2}{l^2} \right) \frac{h_{n0}^2}{l^2} = \frac{h_0^2 \pi^2}{4l^2} \left( \sigma_n + \frac{3Eh_0^2 \pi^2}{16l^2} \right) + \frac{1}{4} A^2 \rho. \quad (2.2.18)$$

Выполняя несложные преобразования с учетом выражения для  $h_0$  согласно (2.2.4), получим

$$A = \frac{2h_{n0}}{l} \sqrt{\frac{1}{\rho} \left( \sigma_n + \frac{5}{4} \frac{Eh_{n0}^2}{l^2} \right)}. \quad (2.2.18, a)$$

С учетом (2.2.10) выражение для  $A$  можно переписать так:

$$A = a\alpha_{n0}\sqrt{\varepsilon_n + \frac{5}{16}\alpha_{n0}^2}. \quad (2.2.19)$$

Принимая во внимание, что согласно (2.2.9) деформация начального отклонения

$$\varepsilon_{n0} = \frac{\alpha_{n0}^2}{2} \Rightarrow \alpha_{n0} = \sqrt{2\varepsilon_{n0}}$$

из (2.2.19) окончательно получим

$$A = a\sqrt{2\varepsilon_{n0}\left(\varepsilon_n + \frac{5}{8}\varepsilon_{n0}\right)}, \quad (2.2.20)$$

где  $\varepsilon_n = \sigma_n/E$  – деформация, вызванная силой предварительного натяжения струны  $T_n$ .

### **2.2.3. Решение линейного однородного уравнения колебания струны**

Предположим, что колебания струны можно представить с помощью линейного однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \bar{a}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (2.2.21)$$

Это уравнение при начальных и граничных условиях (2.2.1) описывает свободные колебания струны. Решение задачи для такого случая без особых затруднений можно получить методом Фурье в виде

$$u(x, t) = \sin \frac{\pi x}{l} \left( h_0 \cos \frac{\pi \bar{a} t}{l} + \frac{A}{\omega} \sin \frac{\pi \bar{a} t}{l} \right). \quad (2.2.22)$$

### **2.2.4. Преобразование решения и анализ новых явлений**

Выполним преобразования выражения в скобках (2.2.22) по известной формуле [10]

$$p \cos \omega t + q \sin \omega t = r \cos(\omega t - \varphi), \quad (2.2.23)$$

$$r = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad \cos \varphi = \frac{p}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{q}{r}, \quad p = h_0, \quad q = \frac{A}{\omega}.$$

Таким образом

$$r = \sqrt{h_0^2 + \frac{A^2}{\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{q}{p} = \frac{A}{\omega h_0}$$

и тогда (2.2.22) принимает вид

$$u(x, t) = \sqrt{h_0^2 + \frac{A^2}{\omega^2}} \sin \frac{\pi x}{l} \cos \left( \omega t - \operatorname{arctg} \frac{A}{\omega h_0} \right). \quad (2.2.24)$$

После дифференцирования по  $x$  из (2.2.24) получим

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{\pi}{l} \sqrt{h_0^2 + \frac{A^2}{\omega^2}} \cos \frac{\pi x}{l} \cos \left( \omega t - \operatorname{arctg} \frac{A}{\omega h_0} \right), \quad (2.2.25)$$

откуда следует, что для

$$t_A = \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{A}{\omega h_0}$$

максимальное значение угла отклонения в местах закрепления струны составляет

$$\alpha(0, t_A) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, t_A) = \frac{\pi}{l} \sqrt{h_0^2 + \frac{A^2}{\omega^2}}. \quad (2.2.26)$$

Поскольку согласно (2.2.4), (2.2.20)

$$h_0 = \frac{2h_{H0}}{\pi}, \quad A = a \sqrt{2\varepsilon_{H0} \left( \varepsilon_n + \frac{5}{8} \varepsilon_{H0} \right)}, \quad \omega = \frac{\pi \bar{a}}{l},$$

то выражение для  $\alpha(0, t_A)$  принимает вид

$$\alpha(0, t_A) = \frac{2h_{n0}}{l} \sqrt{1 + \frac{a^2}{\bar{a}^2} \left( \varepsilon_n + \frac{5}{8} \varepsilon_{n0} \right)}. \quad (2.2.27)$$

Если  $\varepsilon_{n0} \ll \varepsilon_n$ , то согласно (1.4.23) в первой части пособия можно считать, что  $\bar{a}^2 = T_n / \bar{\rho} = ES\varepsilon_n / \bar{\rho} = a^2 \varepsilon_n$ . Тогда из (2.2.27) следует

$$\alpha(0, t_A) \approx \frac{2\sqrt{2}h_{n0}}{l} = \sqrt{2}\alpha_{n0}. \quad (2.2.28)$$

В тех случаях, когда  $\varepsilon_n \ll \varepsilon_{n0}$ , то согласно (2.2.27), можно полагать  $\bar{a}^2 \approx \frac{3}{\sqrt{2}} a^2 \varepsilon_{n0}$  и поэтому

$$\alpha(0, t_A) = \frac{2h_{n0}}{l} \sqrt{1 + \frac{5\sqrt{2}}{24}}. \quad (2.2.29)$$

Таким образом, угол отклонения струны в местах ее закрепления существенно больше, чем в начальном состоянии. Природа такого, на первый взгляд сомнительного, эффекта весьма проста. Освобождение струны от действия статической силы  $Q$  вызывает уменьшение угла наклона, а следовательно и деформации  $\varepsilon = \alpha^2 / 2$ , в средней части струны в связи с трансформацией треугольника в синусоиду. Несмотря на это, общая энергия отклонения струны остается неизменной и равна потенциальной энергии начального отклонения. Поэтому в момент времени, когда струна занимает конечное положение, скорость ее отклонения  $\partial u / \partial t = 0$ , а потенциальная энергия деформации достигает максимума, т.е. равна начальной энергии. Поскольку в средней части струны за счет уменьшения угла наклона деформация уменьшается то, в местах закрепления в связи с сохранением общей энергии, она должна увеличиться, что в конечном итоге вызовет и увеличение угла наклона.

### 2.2.5. Краткие выводы

Полученные выше результаты свидетельствуют, что решение задачи о колебаниях струны позволяет избежать обнаруженных ранее парадоксов в случае формулирования правдоподобных начальных условий. Если начальные условия выведены исходя из энергетического баланса процесса предварительной разгрузки струны, то следствия, вытекающие из решения задачи, позволяют описать неизвестный ранее, но вполне объяснимый, эффект. Суть его состоит в увеличении нагрузки в местах закрепления струны по сравнению с исходной за счет ее предварительного отклонения. Объяснение эффекта весьма простое. Уменьшение угла наклона (а следовательно и нагрузки) в центре струны после устранения удерживающей силы должно привести к его

увеличению на концах. Этот вывод становится более понятным, если учесть, что уменьшение угла наклона в центре струны приводит к уменьшению потенциальной энергии центральных участков. В случае сохранения общей энергии, потенциальная энергия, а следовательно и нагрузка концевых участков возрастает. Она достигает максимума в крайних положениях свободно колеблющейся струны. Именно в этих положениях кинетическая энергия равна нулю, а потенциальная энергия достигает максимума.

Анализ основных зависимостей позволяет также сделать вывод, что решение задачи о колебаниях струны требует нетрадиционного подхода, исходя из теории деформирования с учетом начальных напряжений. Учет начальных напряжений и напряжений за счет отклонения струны позволяет построить физически оправданную картину ее свободных колебаний спустя некоторое время после устранения удерживающей силы.

### **2.2.6. Контрольные вопросы**

1. Сформулируйте физические соображения по поводу превращения формы струны из равнобедренного треугольника в форму синусоиды.
2. Почему начальные условия для струны с формой синусоиды должны содержать неизвестные параметры?
3. Запишите начальные и граничные условия для струны с закрепленными концами, если начальное отклонение имеет форму равнобедренного треугольника.
4. Какие соображения положены в основу при определении величины  $h_0$  для синусоиды отсчетного начального отклонения?
5. Из каких соображений определяется величина максимальной скорости для отсчетных начальных условий?
6. Запишите общую формулу для определения удельной потенциальной энергии начального отклонения струны
7. Запишите общую формулу для определения удельной потенциальной энергии струны в отсчетном начальном состоянии.
8. Запишите общую формулу для определения удельной кинетической энергии струны в отсчетном начальном состоянии.
9. Запишите общее решение задачи о свободных колебаниях струны.
10. Выпишите из пособия преобразованную формулу колебаний струны и расскажите в общих чертах о ее выводе.

11. Почему из преобразованной формулы колебаний струны вытекает следствие об увеличении углов отклонения в местах закрепления?
12. Почему увеличение углов отклонения струны в местах закрепления свидетельствует об увеличении ее натяжения?

## **2.3 Упрощенный подход к постановке и решение задачи о свободных колебаниях стержня с одним закрепленным концом**

### **2.3.1. Предварительные замечания**

В п. 2.1.2 достаточно аргументировано, что традиционная постановка общеизвестной классической задачи о свободных колебаниях стержня с закрепленным концом несовместима с устоявшимися общепринятыми представлениями о распространении волн в упругих средах. При этом установлено, что такого рода задачи, но при корректной постановке, следует относить к разряду нелинейных применительно к телам с переменной массой. Однако, учитывая необычайно большую сложность подобных подходов, попытаемся все же на основе непротиворечивых физических соображений свести упомянутую задачу к линейной. С учетом результатов, полученных в п. 2.2 для струны, можно полагать, что и в этом случае нам удастся получить решение без существенной потери основной информации о характере процесса колебаний стержня.

Начнем анализ колебательного процесса (отсчет времени  $t=0$ ) не с начала освобождения одного конца стержня  $x=l$ , а с некоторым опозданием, спустя время  $\tau=l/a$ . В этот момент, очевидно, исчезает находившаяся прежде в статическом состоянии невозмущенная область. Именно в этот момент волна разгрузки, движущаяся со скоростью звука  $a$ , достигает закрепленного конца, а все частицы стержня, за исключением находящейся в точке  $x=0$ , приходят в движение. Поэтому отпадает необходимость разделять стержень на две области, а действие волнового уравнения вполне оправданно можно распространить на всю длину стержня  $l$ . Однако, при таком подходе возникают существенные трудности, связанные с выбором правдоподобных начальных условий, соответствующих упомянутому отсчетному моменту времени. И тем не менее, попытаемся показать,

что существуют определенные критерии, позволяющие в какой-то степени преодолеть эти трудности и достаточно аргументированно сформулировать начальные условия.

Очевидно, недостатком упомянутого подхода к постановке задачи является то, что из рассмотрения частично или полностью исключается переходный процесс зарождения упругой волны. Что касается преимуществ, то они тоже вполне очевидны – существенное упрощение решения задачи при сохранении информации протекания значительной части процесса, но касающегося только установившихся колебаний.

### 2.3.2. Формулирование начальных и граничных условий

Реализация рассмотренного в п. 2.3.1 подхода позволяет, причем вполне обоснованно, сохранить граничные условия такими же, как и при классической постановке согласно [2, 7], т.е. полагать, что  $u(0,t)=0$ ,  $\partial u/\partial x(l,t)=0$ . Что касается начальных условий, то в прежнем, статическом, виде они лишены смысла, но могут быть определены из таких непротиворечивых соображений. Нагрузка (деформация) на закрепленном конце в момент времени  $t=0$ , принятый за начало отсчета, остается прежней, т.е.  $\varepsilon(0,0)=\varepsilon_H$ . Перемещение  $u_0$ , тоже условно принятое за начальное при  $t=0$ , свободного конца измениться и в случае предварительно растянутого стержня  $u_0 < u_H$ . С достаточным основанием можно полагать, что именно в этот момент, соответствующий лишь частичной разгрузке стержня, распределение деформаций по длине трансформируется и соответствует одной из собственных форм

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = \frac{u_H}{l} \cos \frac{i\pi x}{2l}, \quad (i=1, 3, 5), \quad (2.3.1)$$

т. е. деформация на закрепленном конце остается неизменной –  $\partial u/\partial x(0,0)=u_H/l=\varepsilon_H$ . Из этого соотношения после интегрирования получим распределение перемещений (рис. 2.4.)

$$u(x,0) = \frac{2u_H}{i\pi} \sin \frac{i\pi x}{2l}. \quad (2.3.2)$$

Какой по счету собственной форме следует отдать предпочтение, т.е. какое выбрать значение  $i$ , уточним дальше.

Освобожденный конец стержня в момент прекращения действия удерживающей силы  $Q$ , несомненно, приобретает какую-то начальную скорость  $\dot{u}_H$ . Ее можно определить из таких соображений (рис. 2.5). Выделим на освобожденном конце достаточно малый отрезок стержня,

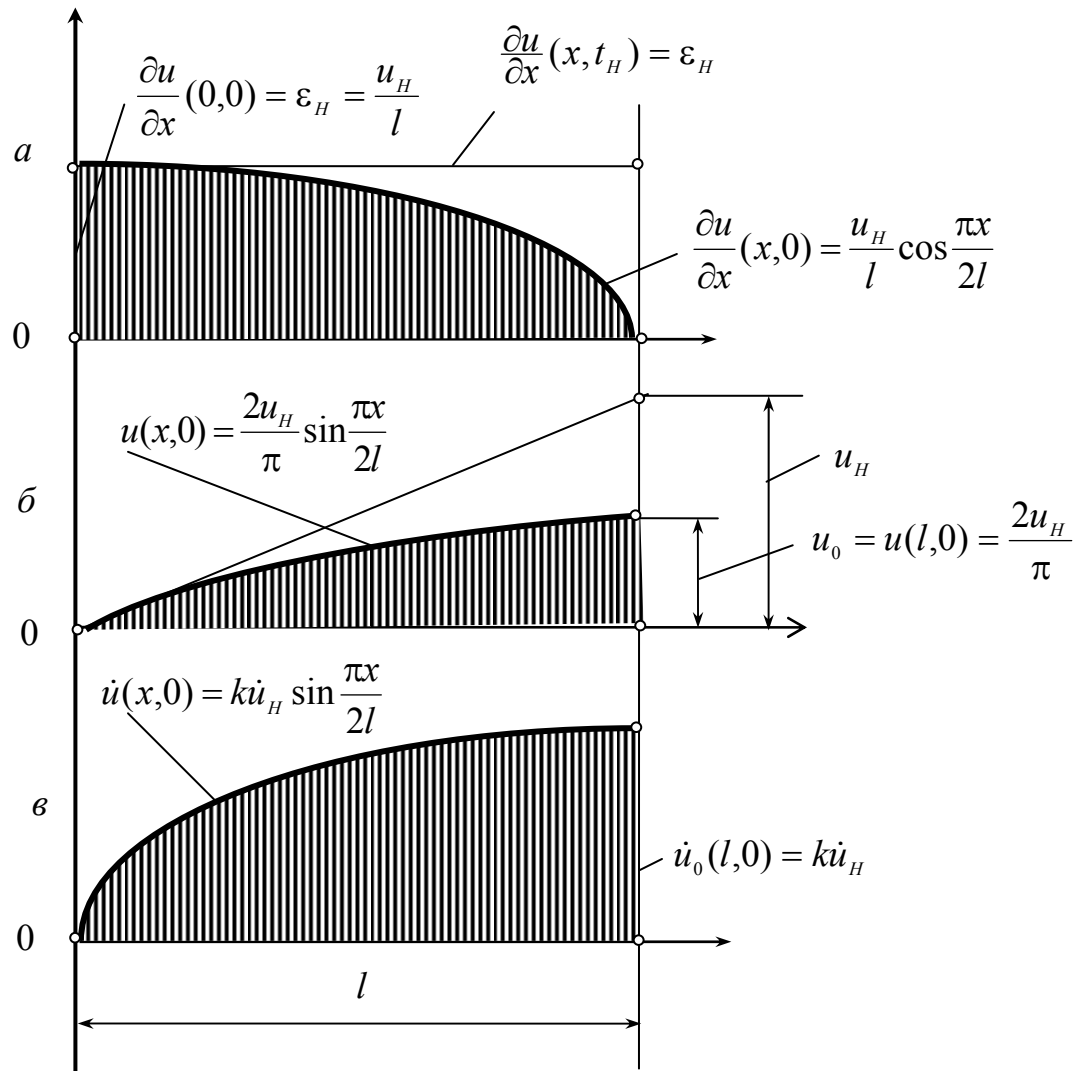


Рис.2.4. К определению начальных условий задачи о свободных колебаниях стержня с одним закрепленным концом: *a* – распределение деформаций по длине стержня в статическом состоянии при действии силы  $Q$  (горизонтальная линия) и в начальный (отсчетный) момент времени  $t = 0$ ; *б* – распределение перемещений по длине стержня в статическом состоянии при действии силы  $Q$  (наклонная прямая линия) в начальный момент  $t = 0$ ; *в* – распределение скоростей по длине стержня в начальный момент времени  $t = 0$ .

длина которого  $dl_*$ . На правой, подвижной стороне этого отрезка действие силы  $Q$  прекращено, а на левой стороне  $Q = ES\varepsilon_H$ . Центр масс ЦМ отрезка  $dl_*$  имеет фактическую начальную скорость  $\dot{u}_H = \dot{\bar{u}}_H / 2$ . Правый конец имеет скорость  $\dot{\bar{u}}_H$ , а истинная скорость левого конца – нуль. Тогда в соответствии с законом приращения импульса

$$-Qdt = \dot{u}_H d\bar{m}_* \Rightarrow -ES\varepsilon_H dt = \dot{u}_H \rho S dl_* . \quad (2.3.3)$$

Имея ввиду, что величина  $c = dl_*/dt$  представляет собой скорость распространения упругой волны, и в первом приближении полагая  $c = a = \sqrt{E/\rho}$ , из соотношения (2.3.3) получим тот же результат, что и в формуле (1.4.10,б),

$$\dot{u}_H = -\varepsilon_H a . \quad (2.3.3, a)$$

Распределение скоростей  $\dot{u}(x,0)$ , соответствующее одной из собственных форм, запишем по аналогии с распределением перемещений  $u(x,0)$ , но с некоторым, пока неизвестным коэффициентом  $k$

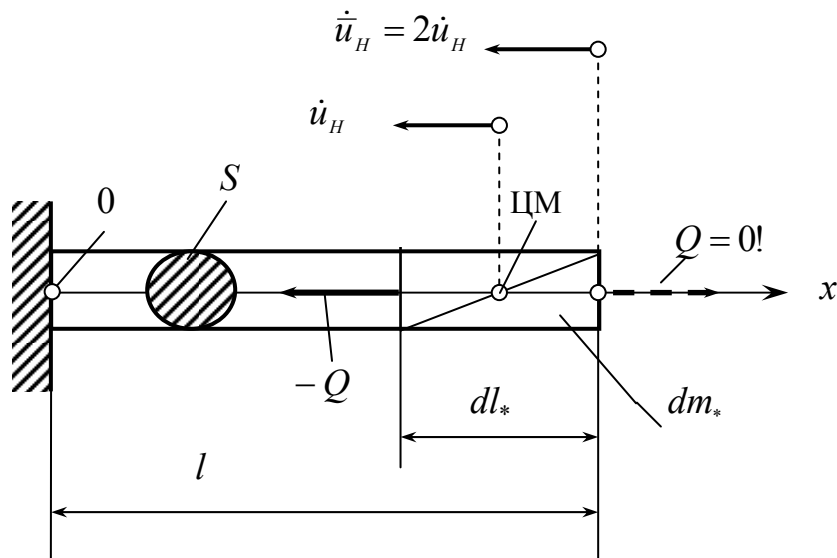


Рис.2.5. К определению начальной скорости конца стержня в момент его освобождения от действия удерживающей силы  $Q$

$$\dot{u}(x,0) = k\dot{u}_H \sin \frac{i\pi x}{2l}. \quad (2.3.2, a)$$

Коэффициент  $k$  определим из условия сохранения общей удельной энергии, которая, очевидно, должна быть равна первоначальной потенциальной энергии  $\Pi_H$ , сообщенной стержню в процессе его растяжения силой  $Q$

$$\Pi_H = \Pi_0 + W_0, \quad \Pi_H = \frac{1}{2} E \varepsilon_H^2 = \frac{E u_H^2}{2l^2}. \quad (2.3.4)$$

Удельные значения потенциальной и кинетической энергии  $\Pi_0, W_0$ , соответствующие моменту времени  $t_0$ , принятому за начало отсчета, с учетом выражений (2.3.1) и (2.3.2) определяются так:

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \frac{1}{2l} \int_0^l E \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) \right)^2 dx = \frac{E u_H^2}{4l^2}, \\ W_0 &= \frac{1}{2l} \int_0^l \rho \dot{u}^2(x,0) dx = \frac{k^2 \dot{u}_H^2 \rho}{4}. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Складывая оба соотношения и имея ввиду, что согласно (2.3.3, а)  $\dot{u}_H = -u_H a/l$ , получим

$$\Pi_0 + W_0 = \frac{E u_H^2}{4l^2} + \frac{k^2 u_H^2 a \rho}{4l^2} = \frac{E u_H^2}{2l^2} \left( \frac{1}{2} + \frac{k^2 a^2 \rho}{2E} \right). \quad (2.3.6)$$

Принимая во внимание, что  $a^2 = E/\rho$ , и сопоставляя выражения (2.3.6) и (2.3.4), приходим к выводу, что из условия сохранения полной удельной энергии необходимо принять  $k=1$ , т.е. за столь короткое время  $t = l/a$ , когда заканчивается процесс возмущения, скорость конца стержня изменяется в два раза. Причем, фактически, это изменение происходит за время  $t \ll l/a$ .

### 2.3.3. Решение волнового уравнения

Для сформулированных таким, основанным на интуиции, способом начальных и граничных условий без особого труда можно записать решение однородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

описывающего свободные колебания стержня, а именно:

$$u(x, t) = \frac{2u_H}{i\pi} \sin \frac{i\pi x}{2l} \cos \frac{i\pi at}{2l} + \frac{\dot{u}_H}{\omega} \sin \frac{i\pi x}{2l} \sin \frac{i\pi at}{2l}, \quad \omega = \frac{i\pi a}{2l}. \quad (2.3.7)$$

После подстановки выражений для  $\dot{u}_H$  и  $\omega$  из (2.3.7) получим

$$u(x, t) = \frac{2u_H}{i\pi} \sin \frac{i\pi x}{2l} \left( \cos \frac{i\pi at}{2l} - \sin \frac{i\pi at}{2l} \right). \quad (2.3.8)$$

Преобразуем выражение в скобках (2.3.8) по формуле согласно [10]

$$p \cos \omega t + q \sin \omega t = r \cos(\omega t - \varphi), \quad (2.3.9)$$

$$r = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad \cos \varphi = p/r, \quad \sin \varphi = q/r, \quad (p=1, q=1).$$

Поскольку  $r = \sqrt{2}$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = -1$  и, следовательно,  $\varphi = -\pi/4$ , то соотношение (2.3.8) принимает вид

$$u(x, t) = \frac{2\sqrt{2}}{i\pi} u_H \sin \frac{\omega}{a} x \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{4} \right), \quad \frac{\omega}{a} = \frac{i\pi}{2l}. \quad (2.3.10)$$

Дифференцируя (2.3.10) по  $x$ , имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{2} \frac{u_H}{l} \cos \frac{\omega}{a} x \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{4} \right). \quad (2.3.11)$$

Если найденные более корректным способом начальные условия существенно отличаются от предполагаемых выше, то их общеизвестным методом [2, 3] можно аппроксимировать с помощью собственных форм или же представить в виде бесконечного ряда. Тогда по аналогии с (2.3.6) можно записать

$$u(x, t) = \sum_{i=1,2,3,\dots}^{\infty} A_i \sin \frac{i\pi x}{2l} \cos \left( \frac{i\pi at}{2l} + \frac{\pi}{4} \right). \quad (2.3.12)$$

Анализируя (2.3.10), нетрудно заметить, что амплитуда перемещения конца стержня  $A_i$  существенно зависит от номера формы  $i$ , которая

принята в качестве начальной, т.е.  $A_i \rightarrow 0$ , если  $i \rightarrow \infty$ . И даже для второй формы ( $i=3$ ) ее значение  $A_i = 0,3u_H$ , что выглядит маловероятным. Поэтому, очевидно, для начальных условий предпочтение все-таки следует отдать основной форме и принять  $i=1$ .

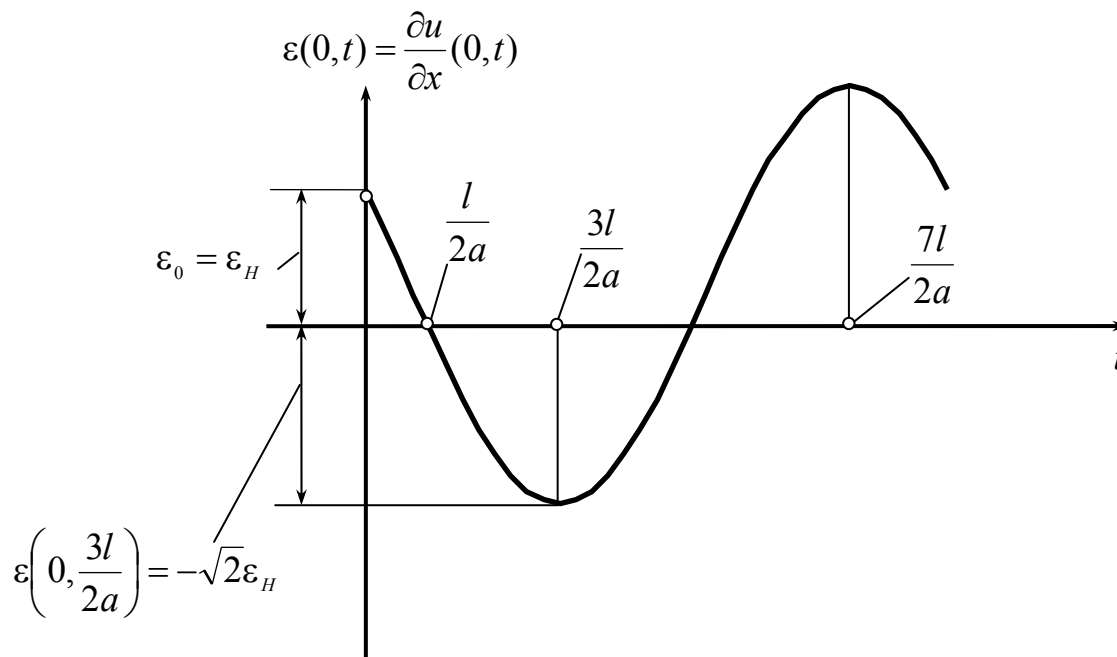


Рис.2.6. График изменения деформации (нагрузки)  $\varepsilon(0,t)$  на закрепленном конце стержня  $x=0$

#### 2.3.4. Эффект увеличения нагрузки на закрепленном конце

Элементарный анализ соотношения (2.3.11) позволяет, как и для струны, обнаружить эффект увеличения нагрузки на закрепленном конце, на возможность проявления которого автор обратил внимание в [11]. Природа эффекта, по-видимому, такова. Поскольку потенциальная энергия деформации для случаев, когда  $\partial u / \partial t = 0$ ,  $(\omega t + \pi/4 = 0)$ , остается неизменной, т.е. равна первоначальной  $\Pi_H = E\varepsilon_H^2/2$ , то устранение удерживающей нагрузки на одном конце стержня должно вызвать ее увеличение в других сечениях. Как следует

из (2.3.11), это происходит не мгновенно (поскольку  $\partial u/\partial t(x,0) \neq 0$ ). В начальный момент на закрепленном конце  $\partial u/\partial x(0,0) = u_H/l$ , затем уменьшается до нуля, а в последующие моменты амплитуда деформации возрастает до величины  $\sqrt{2}u_H/l$ . Таким образом, выражение (2.3.11) частично охватывает и режим перераспределения нагрузки.

### 2.3.5. Предварительная оценка погрешности линейного волнового уравнения

Попытаемся теперь оценить погрешность, допущенную из-за усеченной записи волнового уравнения, которое с учетом нелинейного члена должно иметь такой вид [6]:

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial t} + \dot{u} \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{1}{1 - \frac{\partial u}{\partial x}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\dot{u} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \dot{u}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.3.13)$$

Если принять во внимание, что согласно (1.3.5)  $\partial u/\partial t = (1 - \partial u/\partial x)\dot{u}$ , то в случае  $\dot{u}/a \ll 1$ ,  $\partial u/\partial x \ll 1$  можно легко оценить весомость неучтенного нелинейного члена, а именно:

$$\delta = \frac{2\partial u/\partial t \partial^2 u/\partial x \partial t}{\partial^2 u/\partial t^2} = - \frac{4\sqrt{2} \frac{u_H \omega}{a\pi} \cos \frac{\omega}{a} x \sin^2 \left( \omega t + \frac{\pi}{4} \right)}{\cos \left( \omega t + \frac{\pi}{4} \right)}. \quad (2.3.14)$$

Поскольку  $\omega = \pi a/2l$ ,  $\cos \omega l/a = 0$ , то для  $x=l$  из (2.3.14) следует, что  $\delta = 0$ . А это, по-видимому, означает, что решение линейного уравнения в виде (2.3.10), записанного для свободного конца стержня, не должно существенно отличаться от решения нелинейного уравнения (2.3.13).

### 2.3.6. Краткие выводы

Анализ свободных колебаний стержня с одним закрепленным концом с момента, когда волна разгрузки достигает точки закрепления, позволяет сформулировать правдоподобные начальные условия. Как и в примере колебания струны из полученного решения вытекает следствие – эффект увеличения нагрузки на закрепленном конце.

Объяснение эффекта в этом случае аналогично объяснению такого же явления для струны. При этом обращают на себя внимание и одинаковые коэффициенты в формулах (2.2.28) и (2.3.11), несмотря на существенное различие рассматриваемых процессов. Выбор первой формы для описания начальных условий, сделанный по интуиции, вполне оправдан, поскольку подтверждается и некоторыми аналитическими выкладками, приведенными в конце п. 2.3.3.

### **2.3.7. Контрольные вопросы**

1. С какого момента при упрощенном подходе начинается анализ процесса свободных колебаний стержня с одним закрепленным концом?
2. Почему исключается необходимость разделять стержень на возмущенную и невозмущенную части при упрощенной постановке задачи?
3. Охарактеризуйте основной недостаток упрощенного подхода к анализу процесса свободных колебаний стержня.
4. Сформулируйте начальные условия для стержня при упрощенном подходе и сравните их с традиционными.
5. Что происходит с незакрепленным концом стержня после устранения удерживающей силы?
6. Из каких соображений определяется скорость незакрепленного конца стержня после его освобождения?
7. С какой целью и за какой период времени анализируется энергетический баланс с момента освобождения конца стержня?
8. Как формулируются граничные условия при упрощенном подходе к анализу свободных колебаний стержня с одним закрепленным концом?
9. Сформулируйте сущность нового эффекта, вытекающего, как следствие, из решения задачи.
10. На сколько увеличивается нагрузка по сравнению с исходной на закрепленном конце стержня в процессе свободных колебаний?
11. Объясните причину увеличения нагрузки на закрепленном конце стержня.
12. Почему увеличение нагрузки на закрепленном конце стержня происходит не в момент освобождения его свободного конца?
13. Опишите подход к решению задачи, если начальные условия заданы более сложным выражением по сравнению с рассмотренным.

## **2.4. Вынужденные колебания стержня под действием внезапно приложенной постоянной силы**

### **2.4.1. Предварительные замечания**

Рассматриваемая ниже задача, как и предыдущая, стала уже классической. Она вошла в учебные пособия благодаря простоте и наглядности в части формулирования начальных и граничных условий, а также из-за кажущейся возможности получения точного решения. Хотя, как было показано в первой части пособия (п. 1.6.2), такое решение содержит не только математические противоречия, но и физические парадоксы.

Запишем общепринятые для этой задачи (рис. 2.7.) исходное волновое уравнение, а также начальные и граничные условия

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (2.4.1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0,$$

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \frac{Q}{ES}.$$

Нетрудно убедиться, что эти условия, как и в предыдущей задаче, не учитывают общеизвестного факта о распространении возмущений со скоростью звука и наличия в стержне подвижной границы между возмущенной и невозмущенной областями.

Имея в виду, что при корректной постановке решение такого рода задач затруднительно, мы, как и прежде в п. 2.3, приступим к рассмотрению колебательного процесса со сдвигом во времени от момента приложения постоянной силы  $Q$  к свободному концу стержня. Начнем анализ процесса с некоторым опозданием, когда граница между возмущенной и невозмущенной областями достигает закрепленного конца стержня. Именно в этот момент исчезает невозмущенная область, что позволяет формулировать начальные и граничные условия традиционным способом для стержня в целом.

В отличие от предыдущей, в рассматриваемой задаче анализируются вынужденные колебания стержня, вызванные внезапно приложенной, сосредоточенной силой  $Q$ , которая остается неизменной в процессе колебаний.

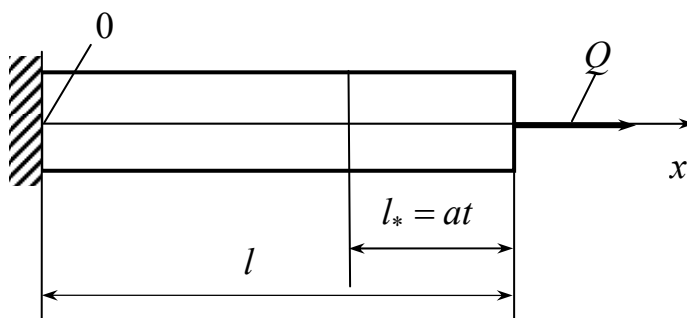


Рис.2.7. К постановке задачи о вынужденных колебаниях стержня под действием внезапно приложенной постоянной силы  $Q$  к его незакрепленному концу

## 2.4.2. Формулирование начальных и граничных условий

Как и в предыдущей задаче, формулирование начальных условий может быть выполнено только на основе интуиции, исходя из таких непротиворечивых соображений. Действие силы  $Q$  в статическом состоянии вызовет однородную деформацию по всей длине стержня  $\varepsilon_c = Q/ES$ . Но в случае внезапного приложения силы  $Q$  очаг деформации возникает только на конце и распространяется со скоростью звука  $a$ .

В момент достижения закрепленного конца распределение деформации по длине, по-видимому, должно соответствовать основной форме. Поэтому есть основания полагать, что в момент времени, принятый за начало отсчета (рис. 2.8), деформация на закрепленном конце равна нулю, а на свободном – обусловлена действием силы  $Q$ . Поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = \frac{Q}{ES} \left( 1 - \cos \frac{\omega}{a} x \right), \quad \omega = \frac{\pi a}{2l}, \quad (2.4.2)$$

откуда, после интегрирования по  $x$  имеем

$$u(x,0) = \frac{Q}{c} \left( \frac{x}{l} - \frac{2}{\pi} \sin \frac{\omega}{a} x \right), \quad c = \frac{ES}{l}. \quad (2.4.3)$$

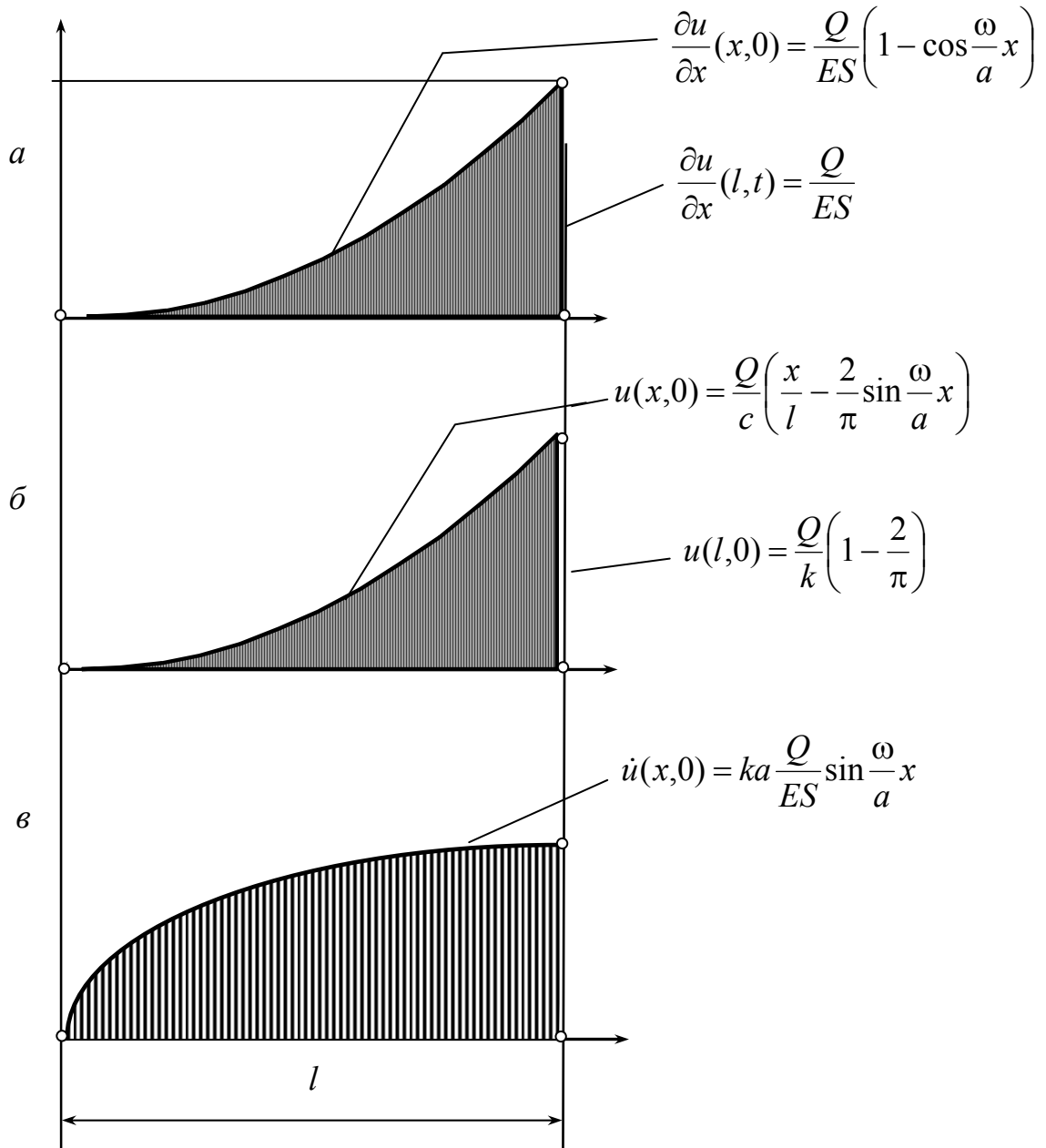


Рис.2.8. К определению начальных условий задачи о вынужденных колебаниях стержня с одним закрепленным концом при воздействии внезапно приложенной силы  $Q$  к свободному концу: *a* – распределение деформаций по длине стержня в начальный (отсчетный) момент времени  $t = 0$ ; *б* – распределение перемещений по длине стержня в начальный (отсчетный) момент времени  $t = 0$ ; *в* – распределение скоростей по длине стержня в начальный (отсчетный) момент времени  $t = 0$ .

Распределение скоростей в начальный момент, принятый за начало отсчета, также следует полагать соответствующим основной форме, то есть

$$\dot{u}(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = k\dot{u}_0 \sin \frac{\omega}{a}x, \quad (2.4.4)$$

где  $k$  – коэффициент, подлежащий определению;  $\dot{u}_0$  – начальная скорость конца стержня (в момент приложения силы  $Q$ ), которая тоже подлежит определению.

Граничные условия, очевидно, с достаточным основанием можно оставить в виде согласно (2.4.1).

### 2.4.3. Решение волнового уравнения

Решение однородного волнового уравнения при заданных согласно (2.4.3), (2.4.4), (2.4.1) начальных и граничных условиях можно получить без особого труда методом Фурье. Легко проверить, что записанная ниже функция

$$u(x,t) = \frac{Q}{c} \left( \frac{x}{l} - \frac{2}{\pi} \sin \frac{\omega}{a}x \cos \omega t \right) + \frac{k\dot{u}_0}{\omega} \sin \frac{\omega}{a}x \sin \omega t, \quad (2.4.5)$$

$$c = \frac{ES}{l}, \quad \omega = \frac{\pi a}{2l}$$

представляет собой такое решение.

Для определения начальной скорости  $\dot{u}_0$  воспользуемся следующими соображениями (рис. 2.5,а). В момент приложения силы  $Q$  конец стержня приобретает какую-то начальную скорость  $\dot{u}_0$ . Для ее определения выделим на свободном конце стержня возмущенный (деформированный) бесконечно малый отрезок длиной  $dl_* = a dt$ . В соответствии с законом приращения импульса

$$Q dt = \dot{u}_0 d\bar{m}_* \Rightarrow ES \varepsilon_* dt = \dot{u}_0 \rho S dl_*, \quad (2.4.6)$$

откуда с учетом, что  $E/\rho = a^2$ ,  $dl_*/dt = a$ , по аналогии с (2.3.3, а) получим такое выражение:

$$\dot{u}_0 = \frac{E\varepsilon_l}{\rho a} = a\varepsilon_l = a \frac{Q}{ES}, \quad (2.4.7)$$

где  $\varepsilon_l$  – деформация конца стержня.

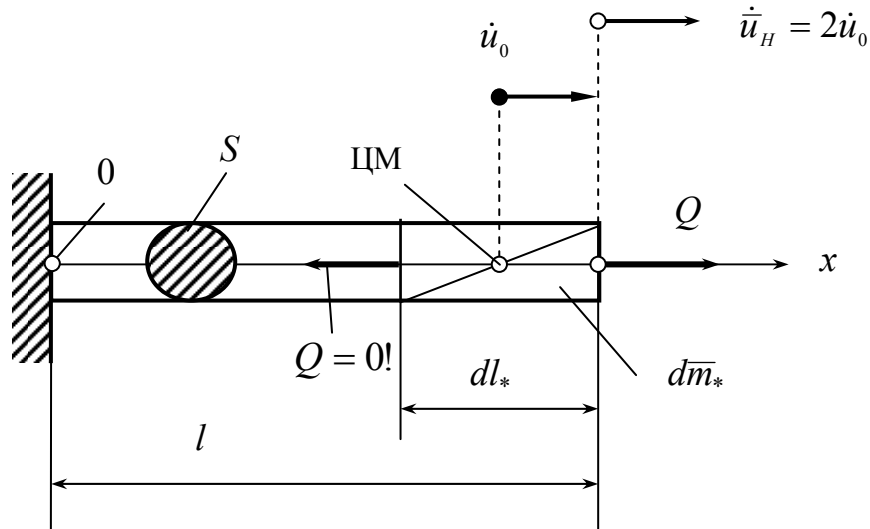


Рис.2.5,а. К определению начальной скорости конца стержня в момент приложения возмущающей силы  $Q$  (см. аналогию с рис. 2.5, но здесь на подвижной границе  $Q=0!$ )

С учетом (2.4.7) решение (2.4.5) можно преобразовать так:

$$u(x,t) = \frac{Q}{c} \left( \frac{x}{l} - \frac{2}{\pi} \sin \frac{\omega}{a} x (\cos \omega t - k \sin \omega t) \right). \quad (2.4.5, a)$$

С целью определения коэффициента  $k$  запишем общее энергетическое соотношение, соответствующее начальному (отсчетному) состоянию

$$\bar{\Pi}_0 + \bar{W}_0 = \bar{A}_0, \quad (2.4.8)$$

где  $\bar{\Pi}_0$  – потенциальная энергия;  $\bar{W}_0$  – кинетическая энергия;  $\bar{A}_0$  – работа внешней силы  $Q$ .

Работа внешней силы  $Q$  с учетом соотношения (2.4.3), после подстановки  $x=l$

$$\bar{A}_0 = Qu(l,0) = \frac{Q^2}{c} \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right) \Rightarrow A_0 = \frac{\bar{A}_0}{Sl} = \frac{Q^2(\pi-2)}{\pi ES^2}. \quad (2.4.9)$$

Кинетическая энергия после подстановки выражения (2.4.4) определяется по формуле

$$\overline{W}_0 = \frac{1}{2} \int_0^l \dot{u}^2(x,0) \rho S dx = \frac{1}{4} k^2 \rho \dot{u}_0^2 l S \Rightarrow W_0 = \frac{\overline{W}_0}{Sl} = \frac{1}{4} k^2 \rho \dot{u}_0^2. \quad (2.4.10)$$

Потенциальная энергия в результате подстановки выражения для деформации согласно (2.4.2)

$$\overline{\Pi}_0 = \frac{1}{2} \int_0^l E \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) \right)^2 S dx = \frac{2Q^2 l}{ES} \left( \frac{3}{8} - \frac{1}{\pi} \right) \Rightarrow \Pi_0 = \frac{\overline{\Pi}_0}{Sl} = \frac{2Q^2}{ES^2} \left( \frac{3}{8} - \frac{1}{\pi} \right), \quad (2.4.11)$$

где  $W_0, \Pi_0$  – удельные значения кинетической и потенциальной энергий.

Могут возникнуть сомнения в правильности определения потенциальной энергии из-за наличия коэффициента  $1/2$ , поскольку стержень подвергается деформации неизменной силой  $Q$  из своего первоначального, недеформированного состояния. Однако, это сомнение сразу же отпадает, если расчет потенциальной энергии выполнять в процессе возврата стержня в недеформированное состояние в статическом режиме.

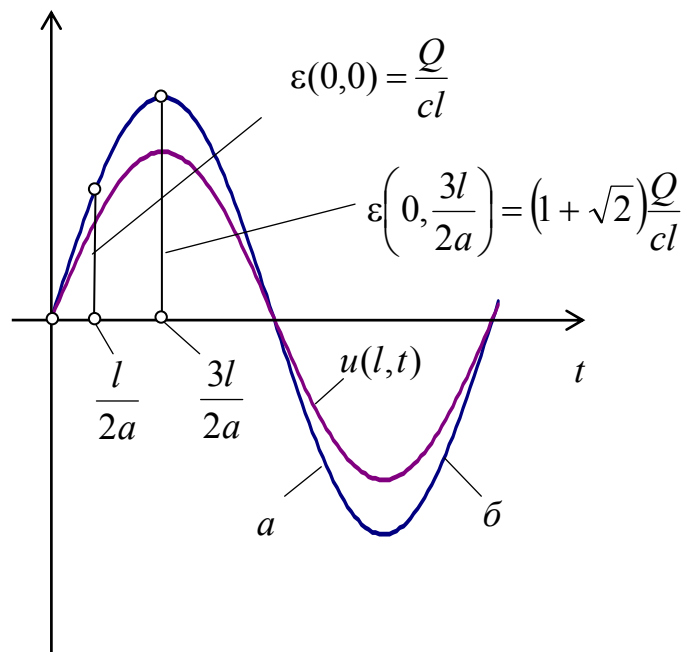


Рис.2.9. Графики изменения: *a* – деформации (нагрузки)  $\varepsilon(0,t)$  на закреплённом конце стержня; *б* – перемещения свободного конца

Если теперь выражение для  $\Pi_0, W_0, A_0$  подставить в (2.4.8), то с учетом (2.4.7) получим

$$\frac{2Q^2}{ES^2} \left( \frac{3}{8} - \frac{1}{\pi} \right) + \frac{1}{4} k^2 \dot{u}_0^2 \rho = \frac{Q^2(\pi-2)}{\pi ES^2} \Rightarrow \frac{Q^2}{ES^2} \left( \frac{k^2}{4} + \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi} \right) = \frac{Q^2(\pi-2)}{\pi ES^2}, \quad (2.4.12)$$

откуда следует, что  $k = 1$ .

Таким образом (2.4.5, а) принимает вид

$$u(x, t) = \frac{Q}{c} \left[ \frac{x}{l} - \frac{2}{\pi} \sin \frac{\omega}{a} x (\cos \omega t - \sin \omega t) \right]. \quad (2.4.13)$$

Преобразуем выражение в круглых скобках по аналогии с формулой (2.3.11) в п. 2.3. Тогда

$$u(x, t) = \frac{Q}{c} \left[ \frac{x}{l} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sin \frac{\omega}{a} x \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (2.4.14)$$

После дифференцирования (2.4.14) по  $x$  имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{Q}{cl} \left[ 1 - \sqrt{2} \cos \frac{\omega}{a} x \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (2.4.15)$$

Если в (2.4.14) и в (2.4.15) выполнить подстановку  $x = l$ , то получим закон перемещения конца стержня и деформацию в точке его закрепления (рис. 2.9), а именно:

$$u(l, t) = \frac{Q}{c} \left[ 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{4} \right) \right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{Q}{cl} \left[ 1 - \sqrt{2} \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (2.4.16)$$

#### 2.4.4. Анализ динамических эффектов

Из соотношений (2.4.16) легко установить максимальное перемещение свободного конца стержня и максимальную деформацию на закрепленном конце. Они, очевидно, наступают синхронно и

соответствуют условию  $\cos(\omega t + \pi/4) = -1$ . Такое условие означает, что  $\omega t = 3\pi/4$  или же  $t = 3l/2a$ , и следовательно

$$u\left(l, \frac{3l}{2a}\right) = \frac{Q}{c} \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(0, \frac{3l}{2a}\right) = \frac{Q}{EF} (1 + \sqrt{2}). \quad (2.4.17)$$

Как вытекает из (2.4.17) максимальное перемещение свободного конца почти в два раза больше, чем при статической нагрузке. При этом максимальная деформация на закрепленном конце почти в 2,5 раза превышает статическую.

## 2.4.5. Краткие выводы

Рассмотренная в 2.4 задача вошла во многие учебники и по сути стала классической. Принято считать, что ее решение в виде тригонометрического ряда является точным. Однако, как было показано в (п. 1.6.2) такое точное решение содержит не только математические противоречия, но и является бессмысленным с физической точки зрения. Основная причина таких противоречий состоит в том, что при постановке задачи не учтен характер распространения возмущений в упругом стержне. Принудительно навязанные линейной динамической системе статические начальные условия такая система вынуждена периодически повторять. К тому же применение метода Фурье для решения задачи при недифференцируемых начальных условиях, заданных в виде ряда Фурье, в конечном итоге привело к математическим противоречиям.

Рассмотрение процесса вынужденных колебаний с момента, когда возмущение достигает закрепленного конца стержня, позволило сформулировать правдоподобные и согласованные с граничными начальные условия. Полученное при таком подходе решение не содержит ни математических противоречий, ни физических парадоксов. К тому же полученное решение позволяет описать увеличение почти в два с половиной раза нагрузки на закрепленном конце стержня и почти двукратное перемещение незакрепленного конца.

## 2.4.6. Контрольные вопросы

1. С какого момента времени удобнее всего начинать анализ процесса вынужденных колебаний стержня при воздействии внезапно приложенной силы к свободному концу? Объясните, почему рассмотрение процесса с самого начала встречает серьезные затруднения.

2. Надо ли разделять стержень на возмущенную и невозмущенную области при упрощенной постановке задачи? Если нет, то почему это не требуется?

3. Сформулируйте начальные условия для рассматриваемой задачи и сравните их с традиционными начальными условиями, известными из учебников. Почему последние ошибочны?

4. Что происходит с незакрепленным концом стержня в момент внезапного приложения постоянной силы к незакрепленному концу в продольном направлении?

5. Как определяется скорость незакрепленного конца стержня в момент внезапного приложения постоянной силы в продольном направлении?

6. С какой целью и за какой период времени анализируется энергетический баланс процесса вынужденных колебаний стержня под воздействием постоянной силы?

7. Как формулируются граничные условия при упрощенном подходе к анализу вынужденных колебаний стержня с одним закрепленным концом?

8. Насколько увеличивается нагрузка на закрепленном конце стержня после внезапного приложения постоянной силы к его свободному концу?

9. Почему увеличение нагрузки на закрепленном конце стержня происходит не сразу после приложения силы к его свободному концу, а спустя некоторое время?

10. Изобразите графически процесс изменения нагрузки на закрепленном конце стержня.

11. Объясните причину дополнительного удлинения стержня при внезапном приложении силы по сравнению со статическим нагружением.

## **2.5. Колебания многомассовых дискретно-континуальных систем с постоянными параметрами**

Реальные механические системы, как правило, состоят из множества дискретных (условно недеформируемых) масс  $m_i$ , соединенных между собой в виде цепи податливыми (упругими, вязкоупругими) связями с распределенными по их длине массами  $\bar{m}_i$  (рис. 2.10). Построение математических моделей таких систем, которые будем называть рядными, связано со значительными математическими трудностями, поскольку наличие распределенных масс не позволяет сразу записать замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений и требует решения системы волновых уравнений с неизвестными граничными условиями в местах закрепления сосредоточенных масс. Поэтому в большинстве случаев массами связей пренебрегают [2, 3] и записывают замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение только сосредоточенных масс. Однако, такой традиционный подход не всегда допустим даже для тех случаев, когда массы связей малы по сравнению с дискретными массами.

В [2] приведены решения задач всего лишь для одномассовой и двухмассовой колебательных систем с распределенной массой связи. Но и эти решения в виде бесконечных тригонометрических рядов имеют такие же недостатки, как и решения, описанные в первой части учебного пособия.

### **2.5.1. Состояние вопроса**

Проблеме построения уравнений движения многомассовых дискретно-континуальных систем с распределенными массами связей посвящено множество публикаций, информацию о которых можно найти в монографиях [12-14]. Поиски в этом направлении периодически возобновляются [15]. При выводе таких уравнений наибольшее распространение получили следующие четыре метода [12-15].

Первый метод состоит в замене каждой распределенной деформируемой массы дискретной системой, для чего распределенная

масса разбивается на несколько участков. Недостаток метода - увеличение количества уравнений соответственно количеству таких участков и сложности с оценкой погрешности. Преимущества - возможность использования хорошо разработанных методик исследования таких систем.

Второй метод известен под названием энергетического или метода Рэля. Он состоит в определении кинетической и потенциальной энергий системы в характерных положениях, когда одна из них становится равной нулю. Недостаток метода связан с некоторым произволом выбора конфигурации системы, т.е. зависимости скоростей или деформаций от координат, и таким образом к постулированию характера зависимости для динамических нагрузок. Преимущества метода – те же, что и предыдущего.

Третий метод тоже энергетический. Для его реализации необходимо задать выражения кинетической и потенциальной энергий системы с последующей подстановкой в уравнения Лагранжа. Недостатки и преимущества у этого метода такие же, как и у предыдущего.

Четвертый метод - прямой, т.е. непосредственное решение системы континуальных уравнений с учетом условий стыковки [15]. Его недостаток - это трудности не только аналитической, но и численной реализации. Преимущества метода - более высокая по сравнению с предыдущими точность решения.

Поэтому проблема построения основных уравнений методом, позволяющим исключить перечисленные недостатки и реализовать преимущества, представляются чрезвычайно актуальной.

### **2.5.2. Постановка задачи (продольные колебания)**

Рассмотрим рядную дискретно-континуальную систему, состоящую из дискретных масс  $m_i$  и связей в виде достаточно длинных стержней постоянного сечения  $S_i=S_i(t)$  (рис.2.10). Будем полагать, что возмущающие силы  $Q_i=Q_i(t)$  приложены к центрам инерции сосредоточенных масс таким образом, что последние совершают только малые продольные колебания в горизонтальной плоскости.

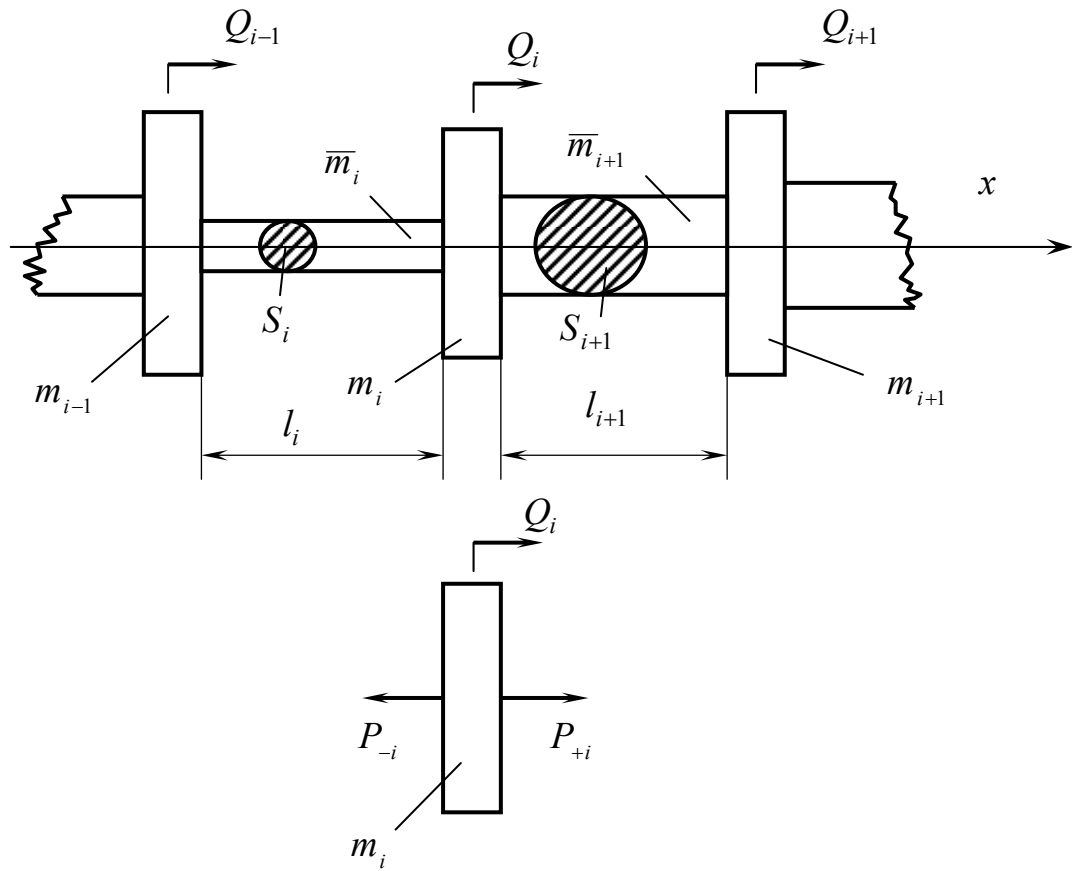


Рис.2.10. Динамическая (расчетная ) схема дискретно-континуальной системы

С учетом упомянутых предположений уравнения движения дискретных масс имеют вид

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - P_{+i} + P_{-i} = Q_i, \quad i=1,2,3 \dots N, \quad (2.5.1)$$

где  $x_i = x_i(t)$  -текущие координаты дискретных масс  $m_i$  ;  $t$  - время ;  $P_{+i}$ ,  $P_{-i}$  -реакции связей справа и слева  $i$ -ой массы соответственно.

Чтобы замкнуть систему (2.5.1), достаточно построить определяющие соотношения для реакций связей  $P_{+i}$ ,  $P_{-i}$ , т.е. найти явные зависимости этих величин от кинематических параметров (перемещений, скоростей, ускорений).

Известные методы построения таких соотношений сводятся либо к постулированию безынерционности связей, в результате чего полагают  $P_{+i} = P_{-(i+1)}$  [16], либо к решению системы одномерных

волновых уравнений [13-15]. Реализация второго метода даже при небольшом количестве дискретных масс составляет серьезные математические трудности. Поэтому на практике часто прибегают к графическим методам либо к замене континуальных систем дискретными [14].

### 2.5.3. Интегральный метод построения определяющих соотношений для реакций связей

Для иллюстрации существа предлагаемого метода выделим связь между произвольными дискретными массами, например  $m_1$  и  $m_2$  (рис.2.11), и запишем условия баланса сил, приложенных к элементарному объему, масса которого  $d\bar{m}$ ,

$$\frac{\partial P}{\partial x} dx = \frac{d^2 x}{dt^2} d\bar{m} = \frac{d^2 x}{dt^2} \rho S dx, \quad (2.5.2)$$

где  $P$  - равнодействующая сил растяжения (сжатия) в произвольном поперечном сечении стержня;  $x$  - текущая координата сечения, т.е.  $x = x(x_0, t)$ ;  $x_0$  - начальное значение координаты  $x$ .

Запишем также очевидное соотношение для частной производной от произведения двух величин (момент функции  $P$ )

$$\frac{\partial}{\partial x} (Px) = P + x \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.5.3)$$

и подставим в него выражение для  $P$  согласно общеизвестной линейной вязко-упругой модели Фойгта [17], позволяющей учесть диссипацию энергии

$$P = ES \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \quad (2.5.4)$$

где  $E$  - модуль продольной упругости;  $\mu$  - динамическая вязкость (продольная);  $u = x - x_0$  - перемещение;  $\dot{u} = \dot{x} = du / dt$  - скорость перемещения.

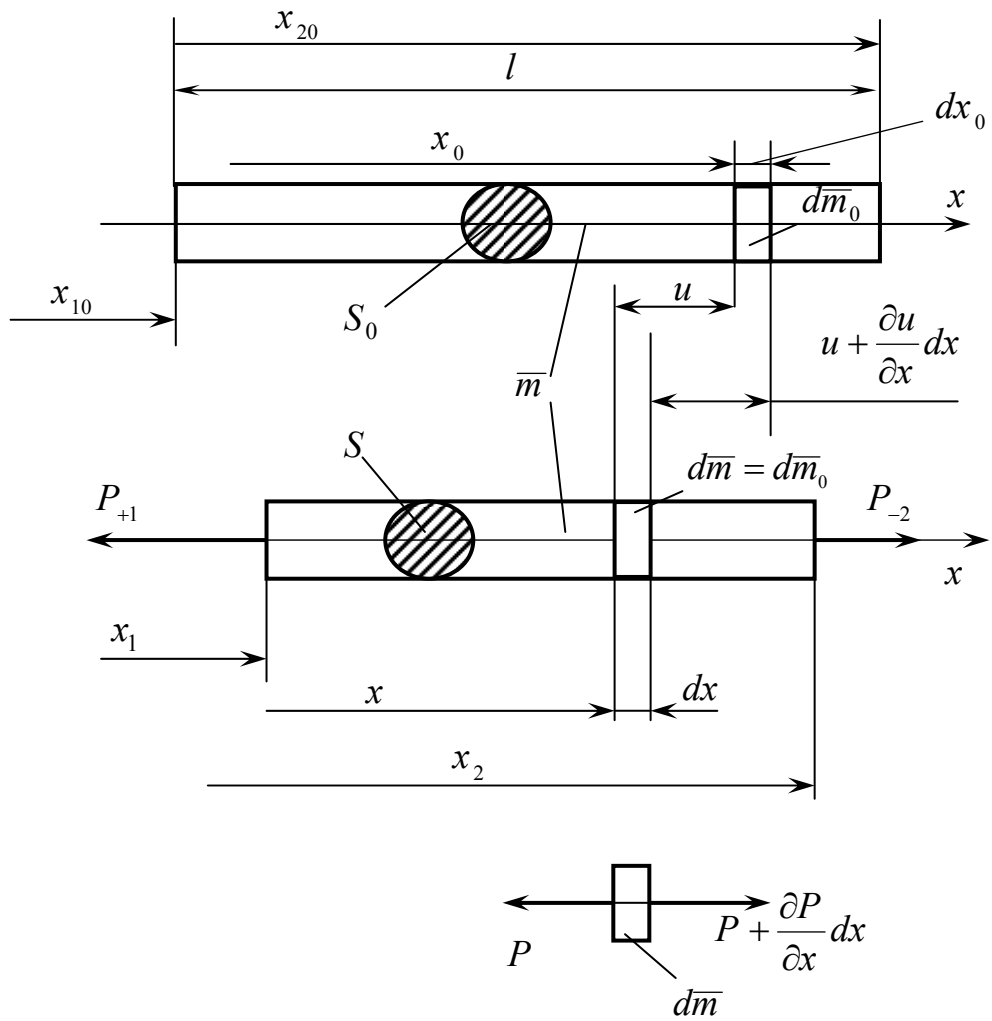


Рис.2.11. К выводу определяющих соотношений для реакций связей

Подставим также в (2.5.3) выражение для  $\partial P / \partial x$  согласно (2.5.2). Тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial x}(Px) = ES \frac{\partial u}{\partial x} + \mu S \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \rho S x \frac{d^2 x}{dt^2}. \quad (2.5.5)$$

Если принять во внимание соотношение

$$x \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2}(x^2) - \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (2.5.6)$$

и проинтегрировать (2.5.5) по длине стержня с учетом общепринятых допущений ( $\rho = \text{const}$ ,  $S \neq S(x)$ ), то в результате получим

$$P_{-2}x_2 - P_{+1}x_1 = ES(u_2 - u_1) + \mu S(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\bar{m}} x^2 d\bar{m} - \int_{\bar{m}} \dot{x}^2 d\bar{m}. \quad (2.5.7)$$

Первый интеграл в (2.5.7) представляет собой планарный момент инерции стержня  $J_x$ , а второй - удвоенное значение его кинетической энергии  $W$ . Знак производной  $d^2/dt^2$  вынесен за пределы интеграла, поскольку масса стержня не зависит от времени ( $\bar{m} = \text{const}$ ).

Принимая во внимание, что

$$J_x = \rho S \int_{x_1}^{x_2} x^2 dx = \frac{\rho S}{3} (x_2^3 - x_1^3) = \frac{\bar{m}}{3} (x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2), \quad (2.5.8)$$

и поочередно совмещая начало координат с концами стержня при условии, что  $u_1 = x_1 - x_{10}$ ,  $u_2 = x_2 - x_{20}$ ,  $\dot{u}_1 = \dot{x}_1$ ,  $\dot{u}_2 = \dot{x}_2$ , окончательно имеем определяющие соотношения для реакций

$$P_{+1} = \frac{ES}{l} (u_2 - u_1) + \frac{\mu S}{l} (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - \frac{\bar{m}}{6} \ddot{u}_2 - \frac{\bar{m}}{3} \ddot{u}_1 + \frac{\bar{m}}{3l} (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \dot{u}_2^2) - 2 \frac{W}{l},$$

$$P_{-2} = \frac{ES}{l} (u_2 - u_1) + \frac{\mu S}{l} (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + \frac{\bar{m}}{3} \ddot{u}_2 + \frac{\bar{m}}{6} \ddot{u}_1 + \frac{\bar{m}}{3l} (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \dot{u}_2^2) - 2 \frac{W}{l}. \quad (2.5.9)$$

Такой подход вполне правомерен, поскольку уравнение (2.5.3) и его интеграл согласно (2.5.7) представляют собой условия баланса моментов функции  $P$ . При этом нетрудно заметить, что в правой части (2.5.7) три члена (первые два и четвертый) не зависят от координат. А это означает, что сумма остальных членов уравнения тоже не должна зависеть от выбора начала координат.

Рассмотренная ситуация аналогична той, которая возникает при определении реакций опор однопролетной балки. Реакции можно определить или из одного уравнения моментов, поочередно помещая начало координат в точки опор или же, не изменяя его положения, привлечь еще и уравнение баланса сил.

В нашем случае к соотношениям (2.5.9) тоже можно прийти одним из указанных способов. Первый из них рассмотрен, а при выводе (2.5.9) вторым способом необходимо использовать условие баланса сил, т.е. фактически применить уравнение движения центра масс стержня  $X$ . Для этого проинтегрируем (2.5.2) по длине

$$P_{-2} - P_{+1} = \bar{m} \frac{d^2 X}{dt^2}, \quad X = \frac{1}{\bar{m}} \int_{x_1}^{x_2} x d\bar{m}. \quad (2.5.10)$$

Координата центра масс после подстановки  $d\bar{m} = \rho S dx$  определяется таким соотношением:

$$X = \frac{1}{2}(x_1 + x_2). \quad (2.5.11)$$

Совместные преобразования выражений (2.5.7), (2.5.10) и (2.5.11) снова дают соотношения для реакций (2.5.9).

С целью оценки вклада последнего члена в (2.5.9) выражение для кинетической энергии можно записать, если по аналогии с методом Рэлея [2] предположить линейное распределение скоростей по длине стержня

$$\dot{x} = \dot{x}_1 + (\dot{x}_2 + \dot{x}_1) \frac{x}{l} \quad (2.5.12)$$

и подставить  $\dot{x}$  в подынтегральное выражение для  $W$ . Тогда получим

$$W = \frac{1}{2} \int_{\bar{m}} \dot{x}^2 d\bar{m} = \frac{\bar{m}}{6} (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \dot{u}_2^2). \quad (2.5.13)$$

Таким образом, последние два члена в (2.5.9) при упомянутом выше предположении взаимно сокращаются, а выражения для  $P_{+1}, P_{-2}$  принимают более простой вид

$$\begin{aligned} P_{+1} &= \frac{ES}{l}(u_2 - u_1) + \frac{\mu S}{l}(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - \frac{\bar{m}}{6}\ddot{u}_2 - \frac{\bar{m}}{3}\ddot{u}_1, \\ P_{-2} &= \frac{ES}{l}(u_2 - u_1) + \frac{\mu S}{l}(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + \frac{\bar{m}}{3}\ddot{u}_2 + \frac{\bar{m}}{6}\ddot{u}_1. \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

#### 2.5.4. Общие уравнения движения дискретно-континуальной системы (продольные колебания)

Подстановка выражений для  $P_{+i}, P_{-i}$  в (2.5.1) дает

$$\left( m_i + \frac{\bar{m}_i + \bar{m}_{i+1}}{3} \right) \ddot{u}_i + \frac{\bar{m}_i}{6} \ddot{u}_{i-1} + \frac{\bar{m}_{i+1}}{6} \ddot{u}_{i+1} + \frac{E_i S_i}{l_i} (u_i - u_{i-1}) -$$

$$-\frac{E_{i+1}S_{i+1}}{l_{i+1}}(u_{i+1}-u_i)+\frac{\mu_i S_i}{l_i}(\dot{u}_i-\dot{u}_{i-1})-\frac{\mu_{i+1}S_{i+1}}{l_{i+1}}(\dot{u}_{i+1}-\dot{u}_i)=Q_i. \quad (2.5.15)$$

#### 2.5.4, а. Примеры

В качестве примеров запишем теперь уравнения движения для некоторых наиболее характерных частных случаев при отсутствии диссипации энергии ( $\mu = 0$ ).

В определяющих соотношениях (2.5.14) первый член, как и в статике, характеризует упругое сопротивление деформированию, второй – вязкое сопротивление (диссипативные потери), третий и четвертый – влияние сил инерции. Поэтому назовем указанные члены соответственно – упругой, вязкой и инерционными составляющими.

Как видим из (2.5.14) инерционные составляющие линейно зависят от ускорений концов связи. При этом влияние ускорения удаленного конца связи в два раза меньше по сравнению с ускорением конца, для которого определяется реакция.

Для одномассовой системы (рис.2.12)

$$\left(m + \frac{\bar{m}}{3}\right)\ddot{u} + \frac{ES}{l}u = Q. \quad (2.5.16)$$

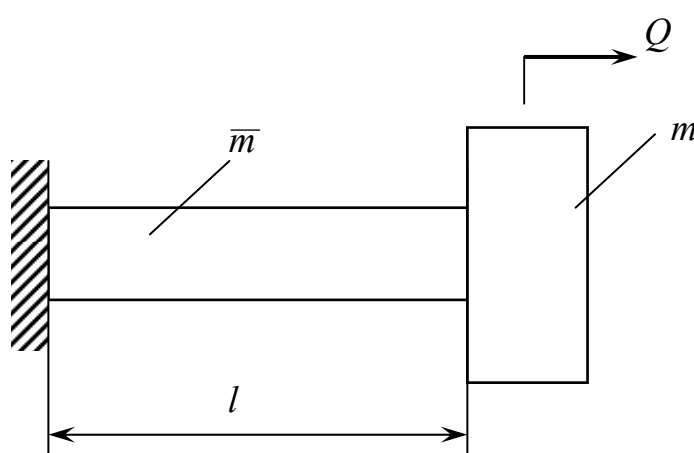


Рис.2.12. Динамическая схема одномассовой системы

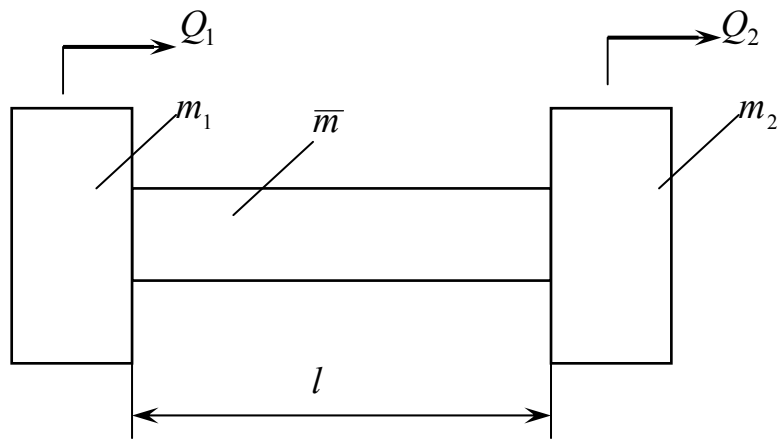


Рис.2.13. Динамическая схема двумассовой системы.

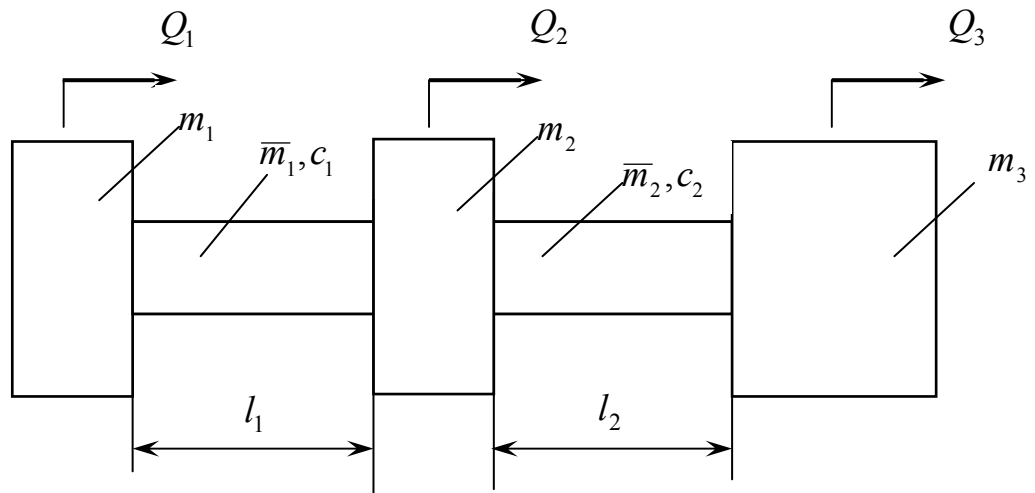


Рис.2.14. Динамическая схема трехмассовой системы

Для двумассовой системы (рис.2.13)

$$\begin{aligned} \left( m_1 + \frac{\bar{m}}{3} \right) \ddot{u}_1 + \frac{\bar{m}}{6} \ddot{u}_2 - \frac{ES}{l} (u_2 - u_1) &= Q_1, \\ \left( m_2 + \frac{\bar{m}}{3} \right) \ddot{u}_2 + \frac{\bar{m}}{6} \ddot{u}_1 + \frac{ES}{l} (u_2 - u_1) &= Q_2. \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

Для трехмассовой системы (рис.2.14)

$$\begin{aligned} \left(m_1 + \frac{\bar{m}_1}{3}\right)\ddot{u}_1 + \frac{\bar{m}_2}{6}\ddot{u}_2 - c_1(u_2 - u_1) &= Q_1, \\ \left(m_2 + \frac{\bar{m}_1 + \bar{m}_2}{3}\right)\ddot{u}_2 + \frac{\bar{m}_1}{6}\ddot{u}_1 + \frac{\bar{m}_2}{6}\ddot{u}_3 + c_1(u_2 - u_1) - c_2(u_3 - u_2) &= Q_2, \\ \left(m_3 + \frac{\bar{m}_2}{3}\right)\ddot{u}_3 + \frac{\bar{m}_1}{6}\ddot{u}_2 + c_2(u_3 - u_2) &= Q_3, \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

$$c_{1,2} = \frac{E_{1,2}S_{1,2}}{l_{1,2}}.$$

Как видим из (2.5.15)–(2.5.18), уравнения движения дискретно-континуальной системы отличаются от аналогичных уравнений дискретной системы инерционными слагаемыми, зависящими от величины распределенной массы и ускорений ее концов.

### 2.5.5. Распространение интегрального метода на крутильные колебания дискретно-континуальной системы

Рассмотренный выше подход можно распространить и на случай крутильных колебаний дискретно-континуальной системы согласно рис.2.15. И хотя, как и для дискретных моделей [2], общие уравнения движения для продольных и крутильных колебаний тоже должны быть, по-видимому, одинаковыми, их вывод имеет некоторые характерные особенности, которые рассматриваются ниже. Авторы [2] также сочли необходимым показать особенности вывода уравнений движения и для продольных, и для крутильных колебаний дискретной системы.

Для пояснения особенностей вывода уравнений движения выделим связь между дискретными массами  $m_1$  и  $m_2$  и запишем очевидное равенство (рис.2.16)

$$\frac{\partial}{\partial x}(Mx) = M + x \frac{\partial M}{\partial x}, \quad (2.5.19)$$

где  $M$  - крутящий момент в произвольном сечении вала с координатой  $x$ ,  $J_i$  - момент инерции дискретной массы с номером  $i$  (рис. 2.16)

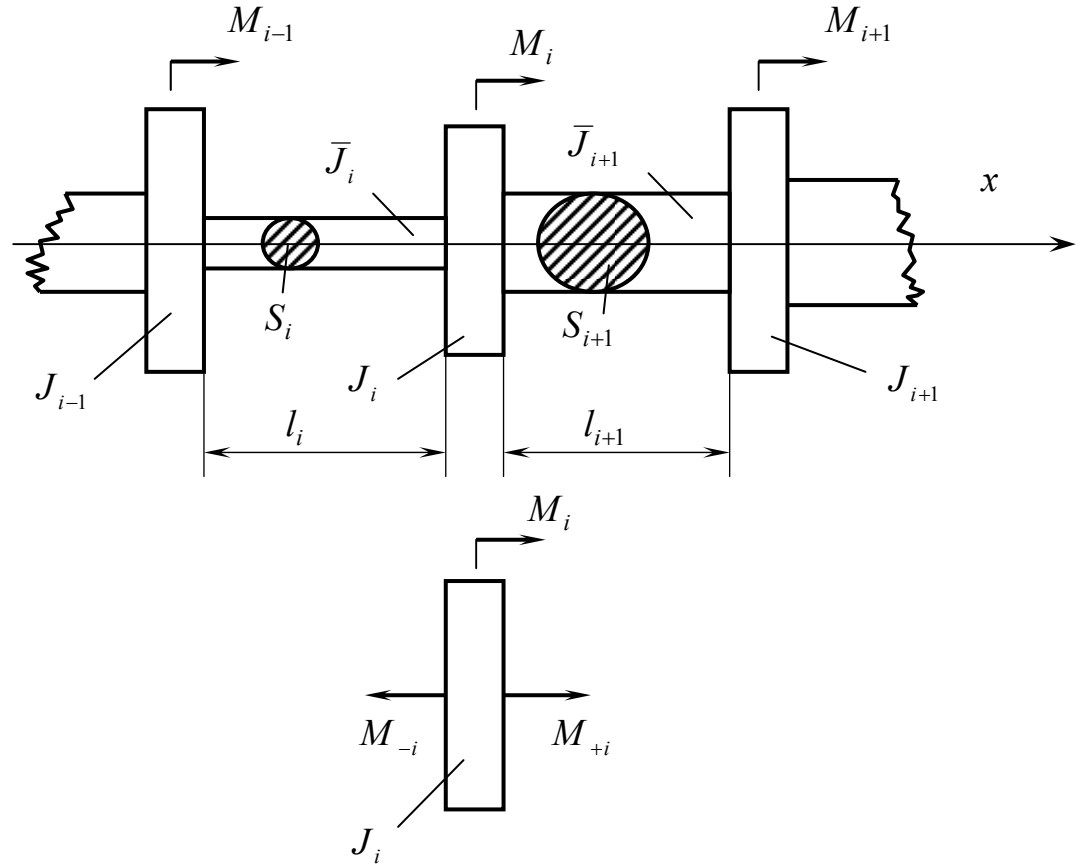


Рис.2.15. Динамическая (расчетная) схема дискретно-континуальной системы (крутильные колебания)

Полагая нагружение вала одномерным, запишем аналог вязкоупругой модели Фойгта (2.5.4) для кручения

$$M = GI \frac{\partial \phi}{\partial x} + \bar{\mu} I \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial x}, \quad (2.5.20)$$

где  $G$  -модуль сдвига;  $\bar{\mu}$  - динамическая вязкость (при сдвиге);  $I$  - полярный момент инерции поперечного сечения вала  $S$ ;  $\dot{\phi}$  - угловая скорость.

Условие баланса моментов, приложенных к элементарному объему  $dV$ , можно записать так

$$\frac{\partial M}{\partial x} dx = \frac{d^2 \phi}{dt^2} d\bar{J}, \quad (2.5.21)$$

где  $d\bar{J}$  – осевой момент инерции массы  $d\bar{m}$  элементарного объема  $dV$ ,

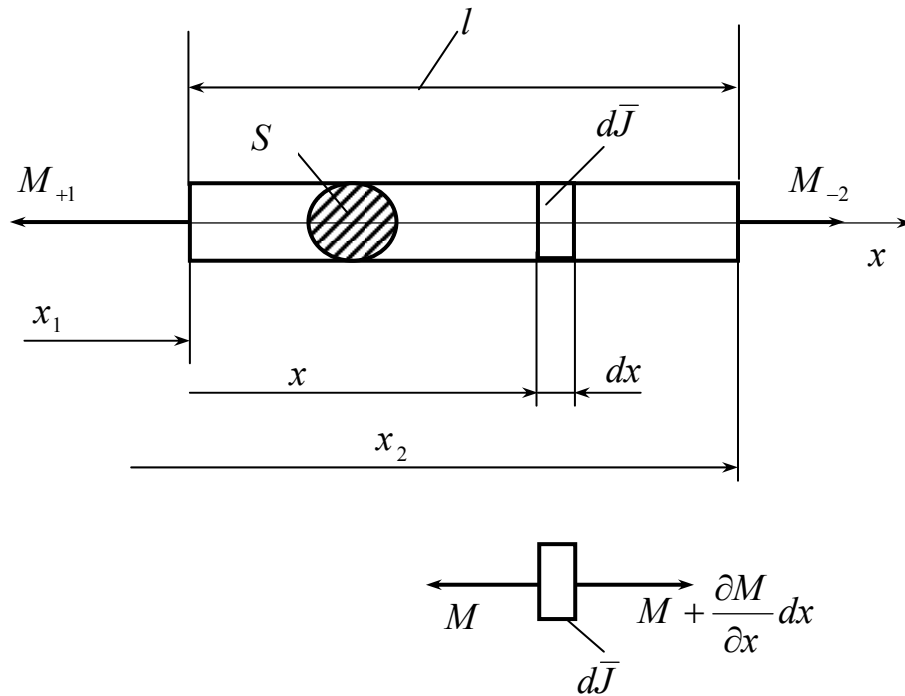


Рис.2.16. К выводу определяющих соотношений для реакций связей (крутильные колебания)

определяемый для вала радиусом  $R$  по общеизвестной формуле

$$d\bar{J} = \frac{R^2}{2} d\bar{m} = \frac{R^2}{2} \rho S dx. \quad (2.5.22)$$

После подстановки (2.5.20) - (2.5.22) в (2.5.19) и последующего интегрирования имеем

$$M_{-2}x_2 - M_{+1}x_1 = GI(\varphi_2 - \varphi_1) + \bar{\mu}I(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + \int_{\bar{J}} x \frac{d^2\varphi}{dt^2} d\bar{J}. \quad (2.5.23)$$

Из простых геометрических соображений следует

$$dx = \frac{R}{\psi} d\varphi \Rightarrow x = x_1 + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{R}{\psi} d\varphi, \quad (2.5.24)$$

где  $\psi$  - угол наклона образующей цилиндра, который, вообще говоря, зависит от координаты  $x$ .

Совмещая начало отсчета с концом вала ( $x_1 = 0$ ) и подставляя (2.5.24) под знак интеграла в (2.5.23), имеем

$$\int_{\bar{J}} x \frac{d^2 \varphi}{dt^2} d\bar{J} = \int_{\bar{J}_1} \left( \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{R}{\psi} d\varphi \right) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} d\bar{J}. \quad (2.5.25)$$

Выражение для  $\psi$  можно записать в виде двух слагаемых

$$\psi = \frac{R(\varphi_2 - \varphi_1)}{l} + \eta(x), \quad (2.5.26)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2$  - угловые координаты концов вала;  $\eta(x)$  - переменная составляющая угла наклона образующей цилиндра.

Очевидно, почти всегда справедливо условие  $\eta(x) \ll \psi$ , и поэтому величина интеграла (2.5.25) существенно не изменится, если при подстановке (2.5.26) в (2.5.25) пренебречь составляющей  $\eta(x)$ . Реализация такой подстановки с учетом (2.5.22) и очевидного соотношения

$$\varphi \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (\varphi^2) - \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \quad (2.5.27)$$

после несложных преобразований (2.5.25) дает

$$\int_{\bar{J}} x \frac{d^2 \varphi}{dt^2} d\bar{J} = \frac{l}{\varphi_2 - \varphi_1} \left( \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\bar{J}} \varphi^2 d\bar{J} - \int_{\bar{J}} \dot{\varphi}^2 d\bar{J} - \varphi_1 \frac{d^2}{dt^2} \int_{\bar{J}} \varphi d\bar{J} \right), \quad (2.5.28)$$

где  $\dot{\varphi} = d\varphi / dt$  - угловая скорость.

В результате совместных преобразований уравнений (2.5.23), (2.5.24), (2.5.26) и (2.5.28) с учетом, что  $x_1 = 0$ , получим такое выражение для момента

$$M_{-2} = \frac{GI}{l} (\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{\bar{\mu}l}{l} (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + \frac{\bar{J}}{3} \ddot{\varphi}_2 + \frac{\bar{J}}{6} \ddot{\varphi}_1 + \frac{\bar{J}(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2) - 6W}{3(\varphi_2 - \varphi_1)}. \quad (2.5.29)$$

Совмещая затем начало отсчета со вторым концом вала ( $x_2 = 0$ ) и выполняя аналогичные преобразования, имеем

$$M_{+1} = \frac{GI}{l}(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{\bar{\mu}I}{l}(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) - \frac{\bar{J}}{3}\ddot{\varphi}_1 - \frac{\bar{J}}{6}\ddot{\varphi}_2 + \frac{\bar{J}(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2) - 6W}{3(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad (2.5.30)$$

где  $W = \frac{1}{2} \int_{\bar{J}} \dot{\varphi}^2 d\bar{J}$  - кинетическая энергия вращательного движения вала.

Согласно (2.5.24) и (2.5.26) выражение для  $\dot{\varphi}$ , если пренебречь величиной  $d\eta/dt$ , можно записать так:

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_1 + (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) \frac{x}{l}. \quad (2.5.31)$$

После подстановки (2.5.22) и (2.5.31) в выражение для  $W$  получим

$$W = \frac{\bar{J}}{6}(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2),$$

и таким образом два последних члена в (2.5.29) и (2.5.30) взаимно сокращаются, а выражения для моментов принимают вид

$$\begin{aligned} M_{-2} &= \frac{GI}{l}(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{\bar{\mu}S}{l}(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + \frac{\bar{J}}{3}\ddot{\varphi}_2 + \frac{\bar{J}}{6}\ddot{\varphi}_1, \\ M_{+1} &= \frac{GI}{l}(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{\bar{\mu}S}{l}(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) - \frac{\bar{J}}{3}\ddot{\varphi}_1 - \frac{\bar{J}}{6}\ddot{\varphi}_2, \end{aligned} \quad (2.5.32)$$

т.е. формально совпадают с (2.5.14).

Для крутильных колебаний системы (рис.2.15) уравнения движения дискретных масс, моменты инерции которых  $J_i$ , записываются аналогично (2.5.1)

$$J_i \frac{d^2 \ddot{\varphi}_i}{dt^2} - M_{+i} + M_{-i} = M_i, \quad i=1,2,3...N. \quad (2.5.1, a)$$

Если в (2.5.1,а) подставить выражения для  $M_{+i}$  и  $M_{-i}$  согласно (2.5.32), то по аналогии с (2.5.15) получим

$$\left( J_i + \frac{\bar{J}_i + \bar{J}_{i+1}}{3} \right) \ddot{\phi}_i + \frac{\bar{J}_i}{6} \ddot{\phi}_{i-1} + \frac{\bar{J}_{i+1}}{6} \ddot{\phi}_{i+1} + \frac{G_i I_i}{l_i} (\phi_i - \phi_{i-1}) - \frac{G_{i+1} I_{i+1}}{l_{i+1}} (\phi_{i+1} - \phi_i) +$$

$$+ \frac{\bar{\mu}_i I_i}{l_i} (\dot{\phi}_i - \dot{\phi}_{i-1}) - \frac{\bar{\mu}_{i+1} I_{i+1}}{l_{i+1}} (\dot{\phi}_{i+1} - \dot{\phi}_i) = M_i. \quad (2.5.33)$$

Следует заметить, что реологическая зависимость (2.5.20), содержащая наряду с  $\partial\phi/\partial x$  и  $\partial\dot{\phi}/\partial x$  высшие производные от деформации  $(\partial\phi/\partial x)_t^{(n)}$ , не приведет к усложнению математических выкладок. При этом в окончательных формулах (2.5.29), (2.5.30) и (2.5.33) появятся лишь дополнительные члены вида  $k_i \frac{d^n}{dt^n} (\phi_i - \phi_{i-1})$ .

### 2.5.6. Оценка погрешности метода

Если не учитывать традиционных погрешностей, привнесенных общепринятыми допущениями в теории малых деформаций, то можно утверждать, что погрешность метода обусловлена лишь произволом выбора зависимостей (2.5.12) и (2.5.31). Хотя именно такие линейные зависимости используются авторами энергетических методов при построении выражений для кинетической и потенциальной энергий.

В нашем случае, в отличие от энергетических методов, (2.5.12) и (2.5.31) используются не для решения задачи, а для оценки одного из слагаемых в окончательном решении, т. е. в определяющих соотношениях (2.5.14), (2.5.29), (2.5.30), вывод которых выполнен без предположения о линейной или какой-либо другой зависимости для распределения скорости по длине стержня.

Соотношения (2.5.12) и (2.5.31), очевидно, соответствуют нагружению стержня без ускорений и с достаточной точностью могут использоваться при малых ускорениях. Поэтому представляет интерес определить погрешность, которая отвечает большим ускорениям, если использовать такие соотношения. С этой целью введем безразмерный критерий  $K_A$ , характеризующий отношение сил, пропорциональных квадрату скорости и ускорению

$$K_A = \frac{\varphi_1(\dot{u}^2)}{\varphi_2(\ddot{u})} \quad (2.5.34)$$

и подставим слагаемые  $\overline{m}\dot{u}^2/3l$  и  $\overline{m}\ddot{u}/3$  из соотношений (2.5.9) в предположении, что для некоторого частного случая  $u = -u_0 \cos \omega t$ . Тогда

$$K_A = \frac{\dot{u}^2}{l\ddot{u}} = \frac{u_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t}{lu_0 \omega^2 \cos \omega t} = \frac{u_0}{l} \frac{\sin^2 \omega t}{\cos \omega t}. \quad (2.5.34, a)$$

Если  $\omega t \rightarrow 0$ , то  $K_A \rightarrow 0$  и таким образом при экстремальных значениях ускорения членами, содержащими  $\dot{u}^2$ , можно пренебречь.

Если  $\pi/2 > \omega t > 0$ , то  $K_A \sim u_0/l$ . А это означает, что члены, содержащие  $\dot{u}^2$ , остаются малыми, и поэтому два последние слагаемые в (2.5.9) можно не учитывать.

Если  $\omega t \rightarrow \pi/2$ , то  $K_A \rightarrow \infty$ ,  $u \rightarrow 0$ . Но в этом случае распределение скоростей стремится к линейному и поэтому два последних слагаемых в (2.5.9) взаимно сокращаются, поскольку выражение принимает вид (2.5.13).

Таким образом, запись определяющих соотношений в виде (2.5.14), (2.5.30), (2.5.33) вполне оправдана, поскольку погрешность такой записи не превышает  $u_0/l$ .

Следует заметить, что не меньшая погрешность привносится и при записи линейного волнового уравнения, поскольку

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{d\dot{u}}{dt} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\dot{u}^2), \quad (2.5.35)$$

и пренебрегая вторым слагаемым, содержащим квадрат скорости, полагают  $d^2 u / dt^2 \approx \partial^2 u / \partial t^2$ .

Таким образом, слагаемые, пропорциональные производной по координате от квадрата скорости, не учитываются на стадии записи волнового уравнения, а в предложенном методе они привносят в решение члены, зависящие от квадратов скоростей (но не производных от этих квадратов) и согласно выполненному выше анализу оказываются малыми по сравнению с членами, зависящими от ускорений.

## 2.5.7. Сравнительный анализ некоторых решений для дискретно - континуальных и дискретных моделей

Полученные уравнения по форме мало отличаются от общеизвестных

уравнений для дискретных систем. В некоторых случаях они даже могут быть приведены к виду, свойственному только дискретной системе, но с другими (приведенными) коэффициентами и правыми частями, содержащими в некоторые добавки.

### 2.5.7.а. Кинематическая аналогия дискретно - континуальных и дискретных моделей

Анализируя уравнение движения одномассовой дискретно-континуальной системы (2.5.16), легко заметить, что оно формально не отличается от уравнения для дискретной системы с эквивалентной приведенной массой  $m^* = m + \bar{m}/3$  для продольных колебаний и эквивалентным моментом инерции  $J^* = J + \bar{J}/3$  для крутильных.

Уравнения движения для двухмассовой системы (рис.2.17)

$$\left(J_{1,2} + \frac{\bar{J}}{3}\right)\ddot{\varphi}_{1,2} + \frac{\bar{J}}{6}\ddot{\varphi}_{2,1} + c(\varphi_2 - \varphi_1) + \eta(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) = M_{1,2}, \quad c = \frac{GI}{l}, \quad \eta = \frac{\mu l}{l}, \quad (2.5.36)$$

тоже легко приводятся к обычной форме

$$J_{1,2}^* \ddot{\varphi}_{1,2} + c(\varphi_2 - \varphi_1) + \eta(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) = M_{1,2}^*, \quad (2.5.37)$$

где  $J_{1,2}^*$ ,  $M_{1,2}^*$  - эквивалентные (приведенные) моменты инерции и внешние нагрузки соответственно, определяемые такими формулами:

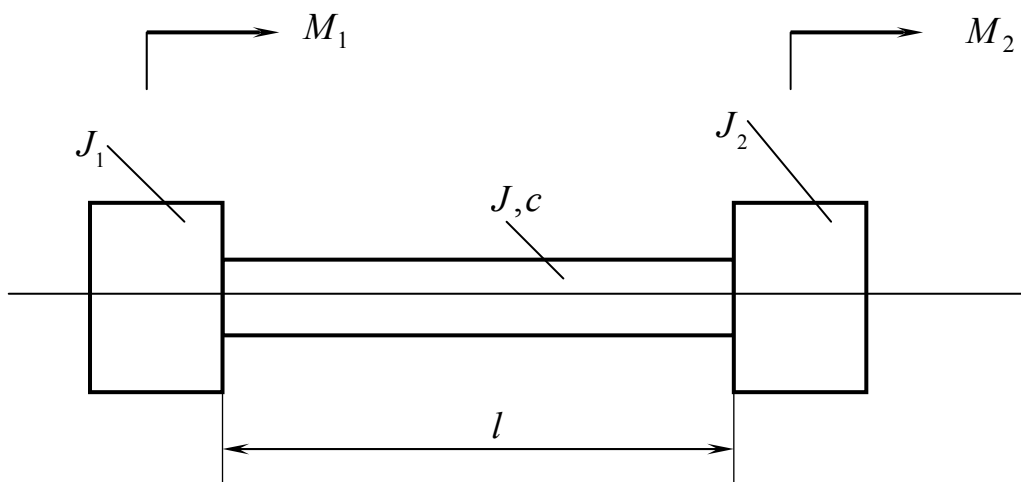


Рис.2.17. Расчетная схема двухмассовой дискретно-континуальной системы

$$J_{1,2}^{\circ} = \frac{\left(J_1 + \frac{\bar{J}}{3}\right)\left(J_2 + \frac{\bar{J}}{3}\right) - \frac{\bar{J}^2}{36}}{J_{1,2} + \frac{\bar{J}}{2}}, M_{1,2}^{\circ} = \frac{\left(J_{2,1} + \frac{\bar{J}}{3}\right)M_{1,2} - \frac{\bar{J}}{6}M_{2,1}}{J_{2,1} + \frac{\bar{J}}{2}}. \quad (2.5.38)$$

Приведение уравнений (2.5.33) для одно- и двухмассовой систем к обычному виду свидетельствует о наличии кинематической аналогии между соответствующими дискретной и дискретно - континуальной моделями, т.е. имеет место совпадение законов движения дискретных масс. Что касается динамической аналогии (совпадение законов нагружения связей), то она обычно отсутствует. Причем дискретно - континуальная модель позволяет описать такие эффекты, которые недоступны для дискретной модели.

#### 2.5.7.в. Особые случаи нагружения дискретно-континуальной системы в режиме свободных колебаний

В качестве примера рассмотрим свободные колебания одномассовой дискретно-континуальной системы с закрепленными связями (рис.2.18). Если соблюдается неравенство  $\bar{J}_1 \ll J \gg \bar{J}_2$ , то следуя общепринятому постулату безынерционности связей дискретной модели при отсутствии диссипации энергии, получим известные соотношения для начальных условий  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi} = 0$  при  $t = 0$

$$J\ddot{\varphi} + (c_1 + c_2)\varphi = 0, \quad (2.5.39)$$

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{J}}, \quad M_1 = c_1 \varphi, \quad M_2 = -c_2 \varphi,$$

откуда следует, что реакции связей  $M_{1,2}$  определяются только величиной углового смещения массы  $\varphi$ , причем обе связи одновременно являются ведущими (разгрузка) или ведомыми (нагружение). Нейтральными связи могут быть тоже одновременно и только в момент полной разгрузки, когда  $M_1 = M_2 = 0$ .

Характерным для такой идеализированной модели является и то, что величина максимальной нагрузки соответствует заданной начальными условиями, т. е.  $M_1^{\max} = c_1 \varphi_0$ ,  $M_2^{\max} = -c_2 \varphi_0$ .

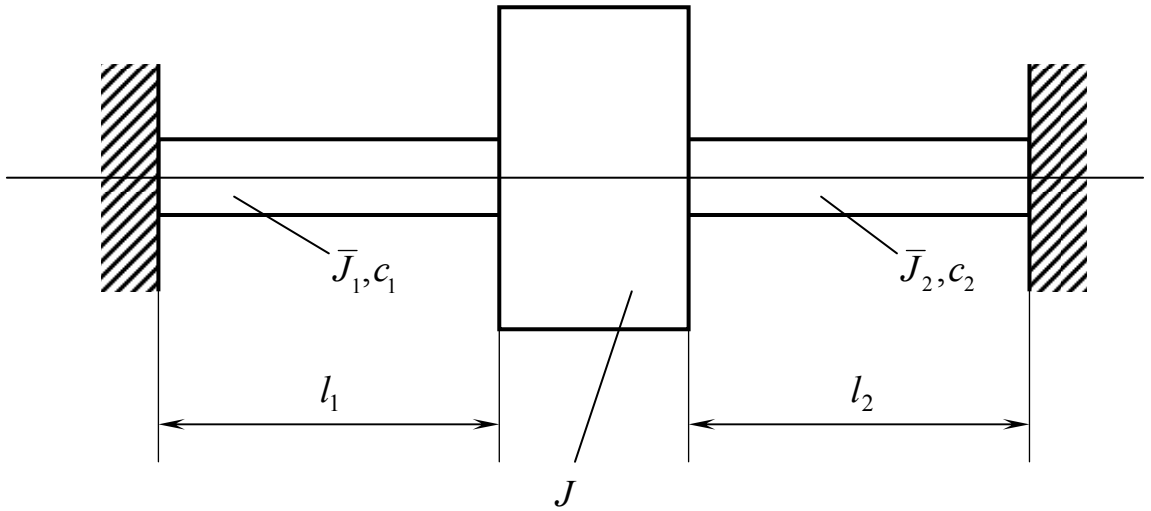


Рис. 2.18. Расчетная схема одномассовой дискретно-континуальной системы с закрепленными связями

С учетом инерции связей имеем

$$\left( J + \frac{\bar{J}_1 + \bar{J}_2}{3} \right) \ddot{\varphi} + (c_1 + c_2) \varphi = 0, \quad (2.5.40)$$

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{J + \frac{\bar{J}_1 + \bar{J}_2}{3}}}, \quad \ddot{\varphi} = -\varphi_0 \omega^2 \cos \omega t,$$

$$M_1 = c_1 \varphi + \frac{\bar{J}_1}{3} \ddot{\varphi}, \quad M_2 = -c_2 \varphi - \frac{\bar{J}_2}{3} \ddot{\varphi}.$$

Сопоставляя (2.5.39) и (2.5.40), убеждаемся в наличии кинематической аналогии для дискретной и дискретно-континуальной систем и особенно при соблюдении неравенства  $\bar{J}_1 \ll J \gg \bar{J}_2$ .

Если ускорения малы, т. е. при низких частотах колебаний, то вторыми членами в выражениях (2.5.40) для моментов  $M_{1,2}$  можно пренебречь и для обеих систем будет иметь место динамическая аналогия. В противном случае

$$M_1 = \varphi_0 \left( c_1 - \frac{\bar{J}_1}{3} \omega^2 \right) \cos \omega t, \quad M_2 = -\varphi_0 \left( c_2 - \frac{\bar{J}_2}{3} \omega^2 \right) \cos \omega t, \quad (2.5.41)$$

откуда вытекает, что при некотором соотношении между параметрами системы (когда выражение в скобках равно нулю) одна из связей может оказаться нейтральной, т. е. ненагруженной в месте соединения с дискретной массой.

Определим условие, при котором одна из связей будет постоянно нейтральной, т. е. когда, например  $M_2 = 0$ . Совместное решение соотношений (2.5.40) при  $M_2 = 0$  дает взаимосвязь

$$c_1 = \frac{3J + \bar{J}_1}{\bar{J}_2} c_2. \quad (2.5.42)$$

Таким образом, если соблюдается (2.5.42), то колебательная система согласно рис. 2.18 как бы распадается на две независимые подсистемы, не взаимодействующие между собой: вал с диском на конце  $(c_1, J)$  и вал  $(c_2)$ , который не оказывает влияния на закон движения диска.

Если в выражение для  $\omega$  подставить по очереди  $c_1$  и  $c_2$  согласно (2.5.42), то получим два других выражения для  $\omega$

$$\omega = \sqrt{\frac{c_2}{\bar{J}_2/3}} = \sqrt{\frac{c_1}{J + \bar{J}_1/3}},$$

которые могут быть найдены из решений уравнений движения указанных независимых подсистем. Такая ситуация, очевидно, может иметь место не только при  $c_1 > c_2$ , но и в случае, когда  $c_1 \leq c_2$ .

Нейтральное поведение подвижного конца связи не означает отсутствия нагрузки на ее неподвижном (закрепленном) конце, на котором согласно определяющих соотношений (2.5.29)

$$M_{2n} = -c_2 \varphi + \frac{\bar{J}_2}{6} \ddot{\varphi}.$$

После подстановки соответствующих выражений для  $\varphi, \ddot{\varphi}, \omega$  получим такое выражение:

$$M_{2n} = -\frac{3}{2} c_2 \varphi \cos \omega t. \quad (2.5.43)$$

Этот результат приводит к выводу, что внезапное снятие статической нагрузки со свободного конца стержня должно вызвать динамическую нагрузку на закрепленном конце, амплитуда которой превышает статическую. Данный эффект и эффект, предсказанный Клапейроном (удвоенная деформация стержня от внезапно приложенной постоянной нагрузки) [2], по-видимому, представляют собой явления одной и той же природы.

Полученный результат совершенно не противоречит здравому смыслу. С физической точки зрения это означает, что мгновенное снятие нагрузки с конца стержня вызывает ее увеличение в других сечениях, поскольку энергия деформации при отсутствии диссипации должна оставаться неизменной. Заметим, что аналогичные результаты мы уже получили в п. 2.3 другим способом.

Теперь определим условия перегрузки второй связи, когда  $M_2 = -Kc_2\varphi$ , причем  $|K| > 1$  (начальное значение при статическом возмущении системы  $M_{2n} = -c_2\varphi_0$ ). Если во второе соотношение (2.5.41) подставить  $M_2 = -Kc_2\varphi$ , то в этом случае получим следующую зависимость между  $c_1$  и  $c_2$ :

$$c_1 = \frac{1}{\bar{J}_2} [(1 - K)(3J + \bar{J}_1) - \bar{J}_2 K] c_2. \quad (2.5.44)$$

Пусть, например,  $J = \bar{J}_1 = \bar{J}_2$ ,  $K = -5$ . Тогда из (2.5.44) находим  $c_1 = 29c_2$ . При  $J = 0$ ,  $\bar{J}_1 = \bar{J}_2$ , пятикратная перегрузка (по сравнению с начальной нагрузкой) будет иметь место, если  $c_1 = 11c_2$ . Следует заметить, что перегрузка связи имеет локальный характер и только при  $K < -1$ . Что касается распределения нагрузки по длине вала, то в данном случае она является знакопеременной. В противоположность безынерционным связям, которые одновременно являются или ведущими, или ведомыми, в нашем примере такое совпадение, как правило, отсутствует. Тот вал, который в свободном состоянии раскручивается быстрее, увлекает за собой не только массу, но и второй вал. При определенных обстоятельствах, согласно соотношению (2.5.44), это и приводит к локальному изменению знака крутящего момента (в месте соединения связи с массой).

### 2.5.7.с. Особенности нагружения дискретно - континуальной системы в режиме вынужденных колебаний

Из уравнений (2.5.38) видно, что закон движения дискретных масс двухмассовой системы с весомой связью такой же, как и для системы с невесомой связью, но с другими (приведенными) значениями моментов инерции дискретных масс и внешних нагрузок. К тому же при соблюдении неравенства  $J_{1,2} \gg \bar{J}$ , приведенные параметры близки по своим значениям к действительным. Таким образом, имеет место кинематическая аналогия между реальной колебательной системой с весомой связью и расчетной системой с невесомой связью, и поэтому вышеуказанное мнение на первый взгляд представляется вполне обоснованным. Однако, в действительности кинематическая аналогия, как и в предыдущем примере, не всегда приводит к динамической аналогии, т.е. совпадение законов движения не приводит к совпадению динамических нагрузок в реальной и расчетной системах. Напротив, действительные нагрузки в реальной системе зачастую не имеют ничего общего с теми, которые следуют из расчета при пренебрежении инерционными свойствами связи, даже в тех случаях, когда  $J_{1,2} \gg \bar{J}$ .

Для пояснения рассмотрим колебания двухмассовой дискретно-континуальной системы согласно рис.2.17 при заданных кинематических возмущениях дискретных масс

$$\varphi_1 = \varphi_0 t + D \cos \omega t, \quad \varphi_2 = \varphi_0 t - D \cos \omega t. \quad (2.5.45)$$

При каких внешних нагрузках можно реализовать данный закон движения дискретных масс, легко определить, если подставить выражения для  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  в уравнения (2.5.37). Тогда получим

$$M_{1,2} = \pm D \left[ \frac{2GI}{l} - \left( J_1 - \frac{\bar{J}}{6} \right) \omega^2 \right] \cos \omega t. \quad (2.5.46)$$

Запишем теперь выражения для реакций связи

$$M_1 = \frac{GI}{l} (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{\bar{J}}{3} \ddot{\varphi}_1 - \frac{\bar{J}}{6} \ddot{\varphi}_2,$$

$$M_2 = \frac{GI}{l}(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{\bar{J}}{3}\ddot{\varphi}_2 + \frac{\bar{J}}{6}\ddot{\varphi}_1, \quad (2.5.47)$$

из которых следует, что инерционными свойствами связей можно пренебрегать только в тех случаях, когда малым являются величины  $\bar{J}\ddot{\varphi}_1$  и  $\bar{J}\ddot{\varphi}_2$ , но не при условии  $\bar{J} \ll J_{1,2}$ .

Имея в виду, что для круглого стержня

$$\bar{J} = \frac{1}{2}\pi\rho lR^4, \quad I = \frac{1}{2}\pi R^4,$$

из (2.5.47) получим

$$M_1 = M_2 = \frac{A\pi R^4\rho l}{12}\left(\omega^2 - \frac{12G}{l^2\rho}\right)\cos\omega t, \quad (2.5.48)$$

откуда следует, что нагружение связи зависит от квадрата частоты. При этом, если  $\omega < \sqrt{12G/l^2\rho}$ , то нагружение концов связи отличается по знаку по сравнению со случаем  $\omega > \sqrt{12G/l^2\rho}$ .

Если же соблюдается условие

$$\omega = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{12G}{\rho}}, \quad (2.5.49)$$

то  $M_1 = M_2 = 0$ , т.е. связь не оказывает сопротивления и ведет себя как нейтральная (находится в режиме свободных колебаний).

Дальнейшее увеличение  $\omega$  вызывает рост нагрузки противоположного знака, а при

$$\omega \gg \frac{1}{l}\sqrt{\frac{12G}{\rho}}, \quad (2.5.50)$$

возникает локальная (на концах) перегрузка связи вплоть до разрушения за счет инерционной нагрузки. И только при

$$\omega \ll \frac{1}{l}\sqrt{\frac{12G}{\rho}} \quad (2.5.51)$$

имеет место динамическая аналогия, т.е. связь можно рассматривать как безынерционную, а ее нагрузку определять по формуле

$$M_1 = M_2 = \frac{GI}{l}(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Из рассмотренных примеров следует, что нагружение связей дискретно - континуальной системы может иметь принципиальные отличия по сравнению с нагружением дискретной системы даже при совпадении законов движения дискретных масс.

### 2.5.8. Анализ собственных частот дискретно-континуальных моделей

Собственные частоты сравнительно просто определяются лишь для одно и двухмассовой моделей, благодаря возможности их приведения к дискретным. Поэтому формулы для собственных частот остаются такими же, но с некоторыми приведенными (эквивалентными) инерционными параметрами.

#### 2.5.8.а. Примеры

**Пример 1.** Для одномассовой модели согласно рис 2.12 после перехода к символам крутильной системы ( $m \rightarrow J$ ,  $\bar{m} \rightarrow \bar{J}$ ,  $Q \rightarrow M$ ) получим

$$J^\circ \ddot{\varphi} + c\varphi = 0, \quad \omega_c = \sqrt{\frac{c}{J^\circ}}, \quad J^\circ = J + \frac{\bar{J}}{3}, \quad (2.5.52)$$

но в отличие от дискретной модели не лишен физического смысла и случай, когда  $J=0$ , а  $J^\circ = \bar{J}/3$ .

**Пример 2.** Для двумассовой модели согласно (2.5.37) и рис.2.17, как и для дискретной модели

$$\omega_c = \sqrt{\frac{c(J_1^\circ + J_2^\circ)}{J_1^\circ J_2^\circ}} \quad (2.5.53)$$

с эквивалентными параметрами  $J_{1,2}^\circ$  согласно (2.5.38).

Здесь также имеют физический смысл два случая, не свойственные дискретной модели.

Первый из них имеет место, когда  $J_1 = J_2 = 0$ . Тогда из (2.5.38) получим  $J_{1,2}^* = \bar{J}/6$  и поэтому из (2.5.53) следует

$$\omega_c = \sqrt{\frac{12c}{\bar{J}}} = \sqrt{\frac{12GI}{l^2 \rho I}} \Rightarrow \omega_c l = \sqrt{\frac{12G}{\rho}}. \quad (2.5.54)$$

Второй случай, когда, например,  $J_1 = 0$ . Тогда из (2.5.38) получим такие выражения для  $J_{1,2}^*$

$$J_1^* = \frac{2}{3}J_2 + \frac{1}{6}\bar{J}, \quad J_2^* = \frac{\bar{J}(4J_2 + \bar{J})}{6(J_2 + \bar{J})}, \quad (2.5.55)$$

подставляя которые в (2.5.53), имеем

$$\omega_c = \sqrt{\frac{12c(J_2 + \bar{J})}{(4J_2 + \bar{J})\bar{J}}}. \quad (2.5.56)$$

Таким образом, освобождение закрепленного конца одномассовой модели фактически превращает ее в двумассовую модель с дискретными приведенными параметрами согласно (2.5.55).

Анализируя выражения для приведенных дискретных параметров, следует отметить их сильную зависимость от соседних дискретных масс, а не только от распределенных, как обычно полагают, присоединяя в процессе приведения к соседним дискретным массам по одной трети массы их связи [14], т.е. по аналогии с одномассовой моделью.

**Пример 3.** При наличии трех и более дискретных масс определение собственных частот требует трудоемких преобразований, которые в общем случае приводят к аналитическому результату только для трехмассовой модели, уравнения свободных колебаний для которой имеют вид (см. рис.2.14 после соответствующей замены символов)

$$\left(J_1 + \frac{\bar{J}_1}{3}\right)\ddot{\phi}_1 + \frac{\bar{J}_1}{6}\ddot{\phi}_2 - c_1(\phi_2 - \phi_1) = 0,$$

$$\left(J_2 + \frac{\bar{J}_1 + \bar{J}_2}{3}\right)\ddot{\phi}_2 + \frac{\bar{J}_1}{6}\ddot{\phi}_1 + \frac{\bar{J}_2}{6}\ddot{\phi}_3 +$$

$$+ c_1 (\varphi_2 - \varphi_1) - c_2 (\varphi_3 - \varphi_2) = 0 ,$$

$$\left( J_3 + \frac{\bar{J}_2}{3} \right) \ddot{\varphi}_3 + \frac{\bar{J}_2}{6} \ddot{\varphi}_2 + c_2 (\varphi_3 - \varphi_2) = 0. \quad (2.5.57)$$

При подстановке  $\varphi_i = \bar{\varphi}_i = D_i \sin(\omega_c t + \varepsilon)$  эта система приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} -\left( J_1 + \frac{\bar{J}_1}{3} \right) \omega_c^2 D_1 - \frac{\bar{J}_1}{6} \omega_c^2 D_2 - c_1 (D_2 - D_1) &= 0, \\ -\left( J_2 + \frac{\bar{J}_1 + \bar{J}_2}{3} \right) \omega_c^2 D_2 - \frac{\bar{J}_1}{6} \omega_c^2 D_1 - \frac{\bar{J}_2}{6} \omega_c^2 D_3 + c_1 (D_2 - D_1) - c_2 (D_3 - D_2) &= 0, \\ -\left( J_3 + \frac{\bar{J}_2}{3} \right) \omega_c^2 D_3 - \frac{\bar{J}_2}{6} \omega_c^2 D_1 - c_2 (D_3 - D_2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.5.58)$$

Группируя подобные члены и располагая их по возрастающим номерам  $D_i$ , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \left[ c_1 - \left( J_1 + \frac{\bar{J}_1}{3} \right) \omega_c^2 \right] D_1 - \left( c_1 + \frac{\bar{J}_1}{6} \omega_c^2 \right) D_2 &= 0, \\ -\left( c_1 + \frac{\bar{J}_1}{6} \omega_c^2 \right) D_1 + \left[ c_1 + c_2 - \left( J_2 + \frac{\bar{J}_1 + \bar{J}_2}{3} \right) \omega_c^2 \right] D_2 - \left( c_3 + \frac{\bar{J}_2}{6} \omega_c^2 \right) D_3 &= 0, \quad (2.5.59) \\ -\left( c_2 + \frac{\bar{J}_2}{6} \omega_c^2 \right) D_2 + \left[ c_2 - \left( J_3 + \frac{\bar{J}_2}{3} \right) \omega_c^2 \right] D_3 &= 0, \end{aligned}$$

определитель, который имеет вид

$$\Delta(\omega_c^2) = \begin{vmatrix} \left[ c_1 - \left( J_1 + \frac{\bar{J}_1}{3} \right) \omega_c^2 \right] & -\left( c_1 + \frac{\bar{J}_1}{6} \omega_c^2 \right) & 0 \\ -\left( c_1 + \frac{\bar{J}_1}{6} \omega_c^2 \right) & \left[ c_1 + c_2 - \left( J_2 + \frac{\bar{J}_1 + \bar{J}_2}{3} \right) \omega_c^2 \right] & -\left( c_3 + \frac{\bar{J}_2}{6} \omega_c^2 \right) \\ 0 & -\left( c_2 + \frac{\bar{J}_2}{6} \omega_c^2 \right) & \left[ c_2 - \left( J_3 + \frac{\bar{J}_2}{3} \right) \omega_c^2 \right] \end{vmatrix}. \quad (2.5.60)$$

Раскрыв определитель и приравняв полученное выражение нулю, имеем уравнение частот, из которого можно найти  $\omega_c^2$ ,

$$\begin{aligned}
 a\omega_c^4 + b\omega_c^2 + \bar{d} &= 0, \\
 a &= \left(J_1 + \frac{\bar{J}_1}{3}\right)\left(J_2 + \frac{\bar{J}_1 + \bar{J}_2}{3}\right)\left(J_3 + \frac{\bar{J}_2}{3}\right) - \\
 &\quad - \left(J_1 + \frac{\bar{J}_1}{2}\right)\left(J_3 + \frac{\bar{J}_2}{3}\right)\frac{\bar{J}_1}{6} - \left(J_3 + \frac{\bar{J}_2}{2}\right)\left(J_1 + \frac{\bar{J}_1}{3}\right)\frac{\bar{J}_2}{6}, \\
 b &= c_2\left(J_1 + \frac{\bar{J}_1}{2}\right)\frac{\bar{J}_1}{6} - c_1\left(J_3 + \frac{\bar{J}_2}{3}\right)\left(J_1 + \frac{\bar{J}_1}{2}\right) - c_1\left(J_3 + \frac{\bar{J}_2}{3}\right)\left(J_2 + \frac{\bar{J}_1 + \bar{J}_2}{3}\right) - \\
 &\quad - c_2\left(J_1 + \frac{\bar{J}_1}{3}\right)\left(J_2 + \frac{\bar{J}_1 + \bar{J}_2}{3}\right) + c_1\left(J_3 + \frac{\bar{J}_2}{2}\right)\frac{\bar{J}_2}{6} - c_2\left(J_1 + \frac{\bar{J}_1}{3}\right)\left(J_3 + \frac{\bar{J}_2}{2}\right), \\
 d &= c_1c_2\left[\left(J_1 + \frac{\bar{J}_1}{2}\right) + \left(J_2 + \frac{\bar{J}_1 + \bar{J}_2}{3}\right) + \left(J_3 + \frac{\bar{J}_2}{2}\right)\right].
 \end{aligned} \tag{2.5.61}$$

Решая квадратное (относительно  $\omega^2$ ) уравнение (2.5.61), находим

$$\omega_c^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ad}}{2a}. \tag{2.5.62}$$

Из рассмотренного примера следует, что определение собственных частот многомассовой дискретно-континуальной модели в общем случае осуществляется по аналогии с дискретной моделью. Однако при некотором соотношении параметров дискретно-континуальной модели может иметь место случай, когда система распадается на подсистемы, фактически не взаимодействующие между собой. Такой случай уже нами рассмотрен в п. 2.5.7 применительно к одномассовой системе с двумя закрепленными связями согласно рис. 2.18.

Если система распадается на подсистемы, то каждая из подсистем находится в режиме свободных колебаний и в этом случае необходимо определять собственные частоты независимо для каждой из них. Такая задача хотя и более простая, поскольку соответственные частоты должны быть равны между собой, но требует аналитических выражений для собственных частот, из которых можно найти

взаимосвязь между параметрами. Необходимо отметить, что распад системы возможен только в точках первоначальных возмущений, после снятия которых она предоставлена сама себе.

**Пример 4. Динамическое гашение колебаний.** Динамические гасители колебаний в виде дополнительной дискретной массы, присоединяемой через упругую связь к основной системе, хорошо известны [2,16]. Расчет таких гасителей обычно основан на решении уравнений движения для дискретных моделей. Поэтому представляет интерес выяснение особенностей расчета с учетом влияния распределенных масс связей.

В качестве примера рассмотрим вынужденные продольные колебания одномассовой системы с закрепленной связью. Для предотвращения вынужденных колебаний дискретной массы  $m$  под воздействием гармонической нагрузки  $Q_0 \sin \omega t$  к ней присоединяется дополнительная дискретная масса  $m_g$  с помощью связи, параметры которой  $\bar{m}_g, c_g$  (рис.2.19). Уравнения движения такой дискретно-континуальной системы с двумя дискретными массами имеют вид

$$\begin{aligned} \left( m + \frac{\bar{m} + \bar{m}_g}{3} \right) \ddot{u} + \frac{\bar{m}}{6} \ddot{u}_g + c u - c_g (u_g - u) &= Q_0 \sin \omega t, \\ \left( m_g + \frac{\bar{m}_g}{3} \right) \ddot{u}_g + \frac{\bar{m}_g}{6} \ddot{u} + c_g (u_g - u) &= 0. \end{aligned} \quad (2.5.63)$$

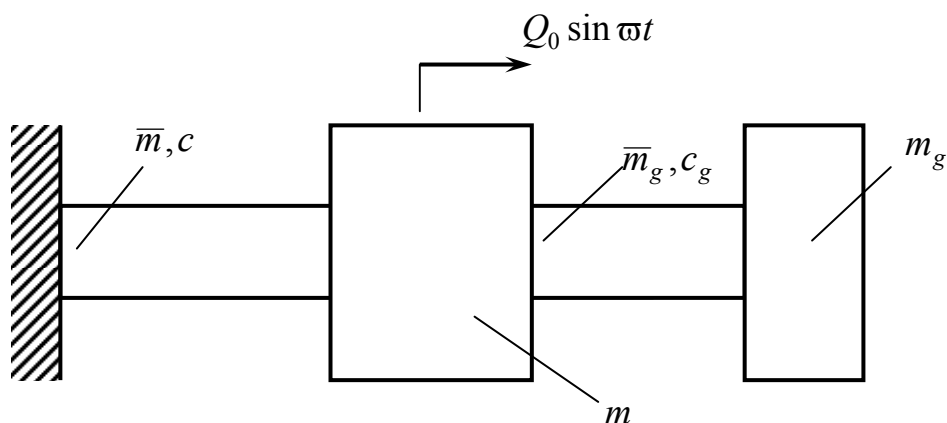


Рис.2.19. Одномассовая дискретно-континуальная система с динамическим гасителем

При установившихся вынужденных колебаниях, т.е. после затухания

свободных колебаний,

$$u = D \sin \omega t, \quad u_g = D_g \sin \omega t. \quad (2.5.64)$$

В результате подстановки (2.5.64) в (2.5.63) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \left[ c + c_g - \left( m + \frac{\bar{m} + \bar{m}_g}{3} \right) \omega^2 \right] D - \left( \frac{\bar{m}_g}{6} \omega^2 + c_g \right) D_g &= Q_0, \\ - \left[ \frac{\bar{m}_g}{6} \omega^2 + c_g \right] D + \left[ c_g - \left( m_g + \frac{\bar{m}_g}{3} \right) \omega^2 \right] D_g &= 0, \end{aligned} \quad (2.5.65)$$

определитель которой имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left[ c + c_g - \left( m + \frac{\bar{m} + \bar{m}_g}{3} \right) \omega^2 \right] & - \left( \frac{\bar{m}_g}{6} \omega^2 + c_g \right) \\ - \left( \frac{\bar{m}_g}{6} \omega^2 + c_g \right) & \left[ c_g - \left( m_g + \frac{\bar{m}_g}{3} \right) \omega^2 \right] \end{vmatrix}. \quad (2.5.66)$$

Если  $\Delta \neq 0$ , то

$$D = \frac{Q_0}{\Delta} \left[ c_g - \left( m_g + \frac{\bar{m}_g}{3} \right) \omega^2 \right], \quad D_g = \frac{Q_0}{\Delta} c_g. \quad (2.5.67)$$

Следовательно, колебания массы  $m$  можно устранить, если

$$c_g - \left( m_g + \frac{\bar{m}_g}{3} \right) \omega^2 = 0, \quad (2.5.68)$$

т.е. когда  $D = 0$  и собственная частота дополнительной массы (антивибратора) определяется по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{c_g}{m_g + \frac{\bar{m}_g}{3}}}. \quad (2.5.69)$$

Если условие (2.5.69) не будет выполнено, то присоединение

дополнительной массы не устранил колебаний, и в этом случае окажутся возможными два резонансных режима, когда  $\omega$  совпадает с одной из двух собственных частот системы, определяемых из уравнения  $\Delta = 0$ .

Таким образом, расчет динамического гасителя колебаний в данном случае мало чем отличается от расчета аналогичного гасителя для дискретной модели.

Однако из соотношений (2.5.68), (2.5.69) вытекает чрезвычайно важный вывод: роль гасителя колебаний может выполнять и распределенная масса, если дискретная масса отсутствует ( $m = 0$ ). Для этого необходимо в соответствии с (2.5.68) подобрать ее параметры  $\bar{m}_g, c_g$ .

### 2.5.9. О решении «резонансных» задач

В первой части пособия (п. 1.6.6) уже упоминалось о распространенной, в том числе и в учебной литературе [3], точке зрения, согласно которой уравнения классической теории упругости не позволяют получать решения при резонансе. Такая точка зрения, по-видимому, является сомнительной и может быть опровергнута в результате решения достаточно простой задачи применительно к рис. 2.12.

Допустим, что внешняя сила  $Q$  согласно рис. 2.12 является гармонической, т.е.  $Q = Q_0 \sin \omega t$ . Тогда, следуя (2.5.16), можем записать

$$\left(m + \frac{\bar{m}}{3}\right)\ddot{u} + cu = Q_0 \sin \omega t, \quad c = \frac{ES}{l}. \quad (2.5.70)$$

Общее решение уравнений такого типа хорошо известно и, в частности, приведено в [2, стр. 54]

$$u = C_1 \cos \omega_c t + C_2 \sin \omega_c t + \frac{H}{\omega_c^2 - \omega^2} \sin \omega t, \quad (2.5.71)$$

$$H = \frac{Q_0}{m + \frac{\bar{m}}{3}}, \quad \omega_c = \sqrt{\frac{c}{m + \frac{\bar{m}}{3}}}.$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  можно определить, если заданы начальные условия. Поскольку, как уже оговаривалось в п.п. 2.3 и 2.4, определение начальных условий составляет серьезную самостоятельную проблему, зададим эти условия в общем виде для  $t = 0$

$$u_{t=0} = u_0, \quad \dot{u}_{t=0} = \dot{u}_0. \quad (2.5.72)$$

Тогда после определения выражений для  $C_1$  и  $C_2$  и подстановки их в (2.5.71) имеем

$$u = u_0 \cos \omega_c t + \frac{\dot{u}_0}{\omega_c} \sin \omega_c t - \frac{H\omega}{\omega_c(\omega_c^2 - \omega^2)} \sin \omega_c t + \frac{H}{\omega_c^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (2.5.73)$$

Первые два члена соответствуют свободным колебаниям с собственной частотой  $\omega_c$ . При нулевых начальных условиях, когда  $u_{t=0} = u_0$  и  $\dot{u}_0 = 0$ , эти члены отсутствуют.

Третий член описывает гармонические колебания с собственной частотой, но с амплитудой, зависящей от амплитуды возмущающей силы. Этот вид колебаний обычно называют свободными сопровождающими колебаниями.

Четвертый член характеризует чисто вынужденные колебания с частотой возмущающей силы. Этот член представляет собой частное решение уравнения (2.5.70) и не зависит от начальных условий.

При совпадении  $\omega$  и  $\omega_c$ , т.е. при резонансе, два последних члена в (2.5.73) приводят к неопределенности, поскольку каждый из них при  $\omega \rightarrow \omega_c$  стремится к бесконечности.

Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталья, получим для случая  $\omega = \omega_c$ ,  $u_{t=0} = u_0$ ,  $\dot{u}_0 = 0$

$$u = \frac{H}{2\omega_c^2} \sin \omega_c t - \frac{Ht}{2\omega_c} \sin \omega_c t. \quad (2.5.74)$$

Как следует из (2.5.74), амплитуда второго члена неограниченно растет при  $t \rightarrow \infty$ .

Итак, мы получили закон движения дискретной массы одномассовой дискретно-континуальной системы в виде (2.5.73). При  $\omega = \omega_c$ , т.е. в резонансном случае, два последних члена принимают вид (2.5.74). Для того, чтобы определить закон движения любой точки связи с

распределенной массой, необходимо решать новую задачу. Такая задача может быть поставлена с использованием и линейного (1.4.6, б), и нелинейного (1.4.6, а) волнового уравнения. Все зависит от значений числа Маха. Общим для обеих постановок будет то, что и в том, и в другом случаях следует рассматривать вынужденные колебания стержня при кинематическом возмущении его незакрепленного конца, когда закон движения конца задан в виде (2.5.73) или (2.5.74).

Поисками методов решения такой задачи мы заниматься не будем, но попытаемся на основе интуиции записать одно из таких возможных решений. Если первые три члена выражения (2.5.73) умножить на  $\sin \frac{\omega_c}{a} x$ , а последний умножить на  $\sin \frac{\omega}{a} x$ , то

$$u(x, t) = u_0 \sin \frac{\omega_c}{a} x \cos \omega_c t + \frac{\dot{u}_0}{\omega_c} \sin \frac{\omega_c}{a} x \sin \omega_c t - \\ - \frac{H\omega}{\omega_c(\omega_c^2 - \omega^2)} \sin \frac{\omega_c}{a} x \sin \omega_c t + \frac{H}{\omega_c^2 - \omega^2} \sin \frac{\omega}{a} x \sin \omega t, \quad (2.5.75)$$

и тогда каждый член (2.5.75) в отдельности удовлетворяет линейному волновому уравнению (1.4.6) при начальных условиях

$$u(x, 0) = 0, \quad \dot{u}(x, 0) = \dot{u}_0 \sin \frac{\omega_c}{a} x - \frac{H\omega}{\omega_c^2 - \omega^2} \left( \sin \frac{\omega_c}{a} x - \sin \frac{\omega}{a} x \right). \quad (2.5.76)$$

Насколько эти начальные условия соответствуют физической реальности, определить затруднительно. Для этого требуются достаточно серьезные самостоятельные исследования по аналогии с выполненными в п. 2.3 и 2.4.

## 2.5.10. Оценка достоверности основных результатов

Важнейшим подтверждением достоверности общих уравнений движения дискретно-континуальных систем (2.5.15) и (2.5.33) может служить полное совпадение их частных случаев (2.5.16)-(2.5.18) с решениями, полученными другими авторами [18, стр.170] энергетическими методами. Однако, несмотря на совпадение конечных результатов, подход согласно этих методов имеет существенный недостаток, о котором упоминалось в п.2.5.1. Поскольку соотношение (2.5.31) с самого начала берется за основу при выводе уравнений

движения, то из него вытекает неизменный характер крутящего момента по длине, т.е. такой же, как и для невесомой связи. При этом фактически упускаются из виду специфические эффекты, рассмотренные в п.п. 2.7.2.в и 2.7.3.с, поскольку отсутствуют определяющие соотношения для реакций в виде (2.5.32). В интегральном методе автора соотношение (2.5.31) используется только при оценке вклада последнего слагаемого в (2.5.30) и формы образующей деформированного вала, что позволило в явном виде получить выражения для моментов на его концах согласно (2.5.32), которые могут отличаться между собой не только по величине, но и по знаку.

Немаловажным свидетельством достоверности является и то, что соотношения для реакций связей (2.5.9), подставленные в уравнение движения центра масс связи (2.5.10), превращают последнее в тождество.

Предсказанные теорией явления (скачок нагрузки на закрепленном конце связи, нейтральное поведение и локальная перегрузка связи), недоступны для дискретных моделей, не противоречат здравому смыслу и имеют косвенное экспериментальное подтверждение.

Общеизвестный факт, предсказанный Клапейроном, об удвоении деформации при внезапном приложении постоянной нагрузки к концу стержня [2], тоже вытекает из решения соответствующей задачи предложенным методом. И действительно, воспользовавшись вторым соотношением (2.5.16) применительно к рис.2.12, получим для случая  $m = 0$

$$\frac{\bar{m}}{3}\ddot{u} + \frac{ES}{l}u = Q. \quad (2.5.77)$$

Поскольку внешняя сила  $Q = \text{const}$ , то решение (2.5.77) при начальных условиях  $u_0 = 0$ ,  $\dot{u}_0 = 0$  имеет вид

$$u = \frac{Ql}{ES}(1 - \cos\omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{3ES}{\bar{m}l}}, \quad (2.5.78)$$

откуда при  $t = \pi/\omega$  получим

$$u_{\max} = \frac{2Ql}{ES} = \frac{2Q}{c}, \quad (2.5.79)$$

т.е. перемещение конца стержня в два раза больше, чем при постепенном приложении нагрузки.

Величина ускорения в начальный момент

$$\ddot{u} = \frac{Q}{c} \omega^2 \cos \omega t \rightarrow \ddot{u}_{t=0} = \frac{Q\omega^2}{c} = 3 \frac{Q}{\bar{m}} \quad (2.5.80)$$

втрое превышает ускорение центра масс свободного, в том числе и недеформируемого, тела с такой же массой при внезапном приложении силы  $Q$ . И действительно, для свободного стержня при внезапном приложении силы  $Q$  к одному концу из (2.5.14), имеем

$$\begin{aligned} c(u_2 - u_1) - \frac{\bar{m}}{6} \ddot{u}_2 - \frac{\bar{m}}{3} \ddot{u}_1 &= 0, \\ c(u_2 - u_1) + \frac{\bar{m}}{6} \ddot{u}_1 + \frac{\bar{m}}{3} u_2 &= Q, \end{aligned} \quad (2.5.81)$$

откуда после вычитания первого уравнения из второго находим

$$\bar{m} \frac{\ddot{u}_2 + \ddot{u}_1}{2} = Q \Rightarrow \bar{m} \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{x_2 + x_1}{2} \right) = Q, \quad (2.5.82)$$

что лишний раз подтверждает достоверность определяющих соотношений (2.5.14).

Определяющие соотношения (2.5.14), оказывается, можно также вывести, воспользовавшись произвольным возможным решением линейного волнового уравнения. Метод такого вывода и некоторые, вытекающие из него ограничения, изложены автором в [5].

### 2.5.11. Краткие выводы

Главный результат данного раздела состоит в построении определяющих соотношений для реакций связей дискретно-континуальных систем. Сущность метода такого построения заключается в интегрировании по пространственной переменной преобразованного уравнения движения элементарного объема.

Соотношения для реакций связей получены автором впервые в конце 70-х годов. Их достоверность подтверждается экспериментальными фактами для частных случаев, совпадением общих уравнений движения, построенных на их основе, с результатами других авторов,

физической очевидностью вытекающих из них следствий, а также возможностью вывода другим методом, описаны в [5].

При выводе уравнений учтены и диссипативные свойства распределенных масс, которые, как известно [3], в ряде случаев вносят существенные поправки в колебательные процессы.

Полученные уравнения позволяют описать такие явления, которые недоступны для анализа с помощью дискретных моделей. Установлено, что даже в режиме свободных колебаний нагружение связей может не иметь ничего общего с тем, которое следует из расчета традиционным методом, хотя законы движения дискретных масс в том и другом случае остаются близкими.

Установлены пределы применимости дискретных моделей для некоторых частных случаев и показано, что эти пределы для вынужденных колебаний расширяются при уменьшении произведения длины связи и частоты, а не (как принято полагать) отношения величин распределенной и дискретной масс.

Уравнения (2.5.15) и (2.5.33) позволяют описать закон движения масс не только в случае связей постоянного сечения, но и при дискретном изменении сечения. Для этого достаточно записать аналогичные уравнения, полагая в местах стыков соседних участков вала наличие фиктивных масс с нулевыми массами (моментами инерции). В общем случае первоначально каждую динамическую схему следует рассматривать, как состоящую только из деформируемых звеньев. Записать уравнения движения в этом случае не представляет труда. Принцип остается таким же, как и для ступенчатого вала, в местах стыков которого прилагаются внешние нагрузки.

## **2.5.12. Контрольные вопросы**

1. Охарактеризуйте суть традиционного подхода к построению динамических моделей дискретно-континуальных систем.
2. Охарактеризуйте преимущества и недостатки известных методов, применяемых для построения динамических моделей дискретно-континуальных систем.
3. Запишите незамкнутую систему уравнений движения сосредоточенных масс рядной дискретно-континуальной системы. Укажите какие зависимости нужны для замыкания системы.

4. Расскажите в общих чертах о сущности подхода к построению определяющих соотношений для реакций связей, имеющих распределенную по их длине массу.
5. Запишите определяющие соотношения для реакций связи с распределенной массой.
6. Назовите составляющие определяющих соотношений для реакций связи с распределенной массой и объясните их физический смысл.
7. Запишите уравнение движения сосредоточенной массы одномассовой дискретно-континуальной системы с закрепленной связью.
8. Запишите уравнение движения сосредоточенных масс двухмассовой дискретно-континуальной системы.
9. Запишите уравнение движения дискретных масс трехмассовой дискретно-континуальной системы.
10. Чем отличаются уравнения движения сосредоточенных масс дискретно-континуальной системы от уравнений движения аналогичной дискретной системы?
11. Чем отличаются уравнения крутильных колебаний дискретно-континуальной системы от уравнений продольных колебаний такой же системы?
12. Какова максимальная погрешность записи определяющих соотношений для реакций связи?
13. Расскажите о кинематической аналогии дискретной и дискретно-континуальной двухмассовой колебательной системы.
14. Чем объяснить отсутствие динамической аналогии дискретной и дискретно-континуальной системы при наличии кинематической аналогии?
15. Поясните сущность эффекта нейтрального поведения связи в одномассовой дискретно-континуальной системе с закрепленными концами связей.
16. Поясните сущность эффекта повышения нагрузки по сравнению со статической на закрепленном конце при ее нейтральном поведении в месте соединения с дискретной массой.
17. Поясните сущность эффекта перегрузки одной связи в одномассовой дискретно-континуальной системе с закрепленными концами обеих связей.

18. На примере вынужденных колебаний дискретно-континуальной двухмассовой системы поясните условия, при которых связь ведет себя как нейтральная или же как безынерционная.
19. На примере вынужденных колебаний дискретно-континуальной двухмассовой системы поясните условия, при которых возникает локальная перегрузка связи противоположного знака.
20. Запишите варианты для определения собственной частоты одномассовой дискретно-континуальной системы с закрепленной связью.
21. Запишите варианты для определения собственной частоты двухмассовой дискретно-континуальной системы.
22. Расскажите о принципе динамического гашения колебаний.
23. Приведите факты, свидетельствующие о достоверности определяющих соотношений для реакций связи с распределенной массой.
24. Расскажите о методе, который позволяет получить решение задачи в случае резонанса. В качестве примера используйте одномассовую систему с закрепленной связью.

## **2.6. Уравнения движения многомассовых дискретно-континуальных систем с переменными массами**

Динамические схемы многих современных механических систем содержат звенья с переменными параметрами. Изменяться могут величины дискретных масс, но чаще всего изменяются жесткости и массы связей. Обычно изменение жесткости и массы связей вызывается изменением их длины. Наиболее широко распространенные в технике случаи, приводящие к рассмотрению подобных задач, связаны с подъемом (опусканием) груза с помощью каната или винта, погружением (забивкой) свай в грунт, переключением вращающихся зубчатых колес в редукторах за счет их перемещения вдоль вала и т.п. (рис. 2.20). Ввиду того, что при работе таких устройств происходит изменение массы и жесткости связей, расчет динамических нагрузок по формулам, рассмотренным в п. 2.5, в ряде случаев может привести к значительным погрешностям не только количественного, но и качественного характера. Поэтому корректное построение динамических моделей для дискретно-континуальных систем с переменными параметрами является важнейшей составной частью

научно обоснованных инженерных расчетов механических систем.

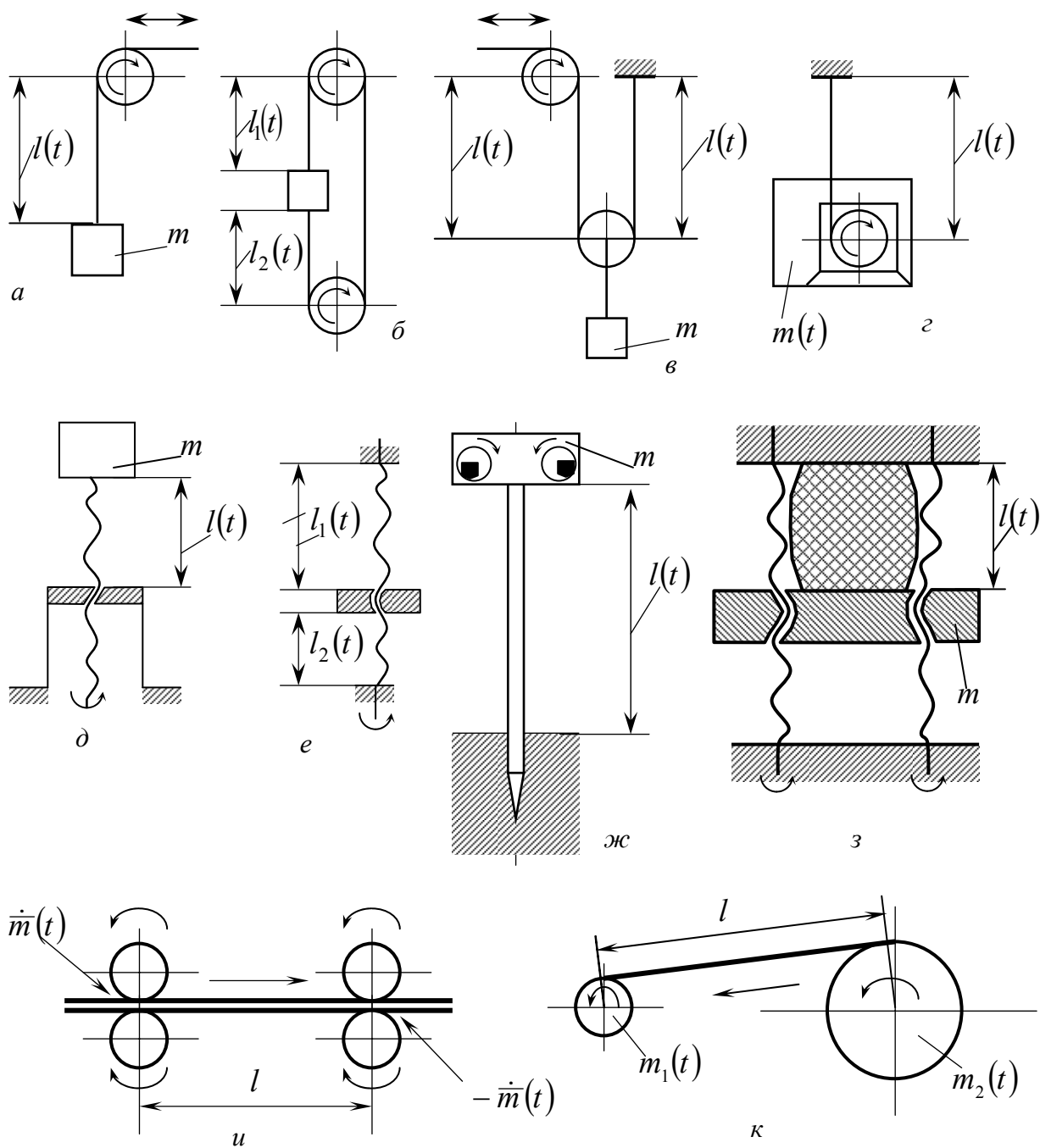


Рис.2.20. Характерные примеры дискретно-континуальных систем с переменными параметрами: а - незамкнутый канатный подъемник; б - замкнутый канатный подъемник; в - полиспаст; г - канатный подъемник с приводом на подъемной платформе; д - винтовой подъемник с подвижным винтом; е - винтовой подъемник с неподвижным винтом; ж - вибропогружение сваи; з - винтовой пресс; и - секция лентопотягивающего устройства; к - намоточное устройство.

### 2.6.1. Состояние вопроса

Проблеме построения удобных для расчетов уравнений динамики механических систем с переменной массой звеньев посвящены многочисленные работы, информацию о которых можно найти в [20]. Особое место среди этих работ занимают десятки публикаций, имеющие непосредственное отношение к обсуждаемому вопросу и посвященные динамике шахтного подъема. Наиболее корректно задача построения уравнений динамики шахтного подъема решена в работах [21, 22]. Однако принятое их авторами предположение о линейном распределении перемещений по длине каната по сути дела констатирует независимость динамических нагрузок от координат. Для горизонтальной колебательной системы, когда силы веса не учитываются, такое предположение соответствует какому-то возможному состоянию, но для вертикальной системы даже в статическом состоянии наличие сил веса каната приводит к квадратичному распределению перемещений по его длине. Поэтому предположение согласно [21, 22] может отвечать с некоторым приближением лишь частному случаю, т.е. для малой высоты подъема, когда вес каната мал по сравнению с весом груза.

Наряду с отмеченным следует обратить внимание и на то, что в режиме опускания присоединяемые части каната обычно уже имеют начальные деформации, которые оказывают существенное влияние на общее напряженное состояние. Этот фактор в упомянутых работах не учитывается.

Таким образом, можно с уверенностью утверждать, что актуальность решения и данной задачи, и более общей в уточненной постановке не вызывает сомнений.

### 2.6.2. Постановка задачи

Рассмотрим рядную дискретно-континуальную систему, состоящую в общем случае из переменных дискретных масс  $m_i(t)$  и связей в виде стержней постоянного сечения  $S_i \neq S(x)$ , масса которых изменяется, т. е.  $\bar{m}_i = \bar{m}_i(t)$  в результате изменения длины  $l_i = l_i(t)$  (рис.2.21, а).

Условно освобождая дискретные массы от связей, запишем уравнения баланса сил, действующих на них

$$P_{+i} - P_{-i} + Q_i + m_i g = m_i \ddot{x}_i, \quad i=1,2,3,\dots,N. \quad (2.6.1)$$

От (2.5.1) эти уравнения отличаются лишь наличием дополнительных слагаемых, учитывающих силы веса.

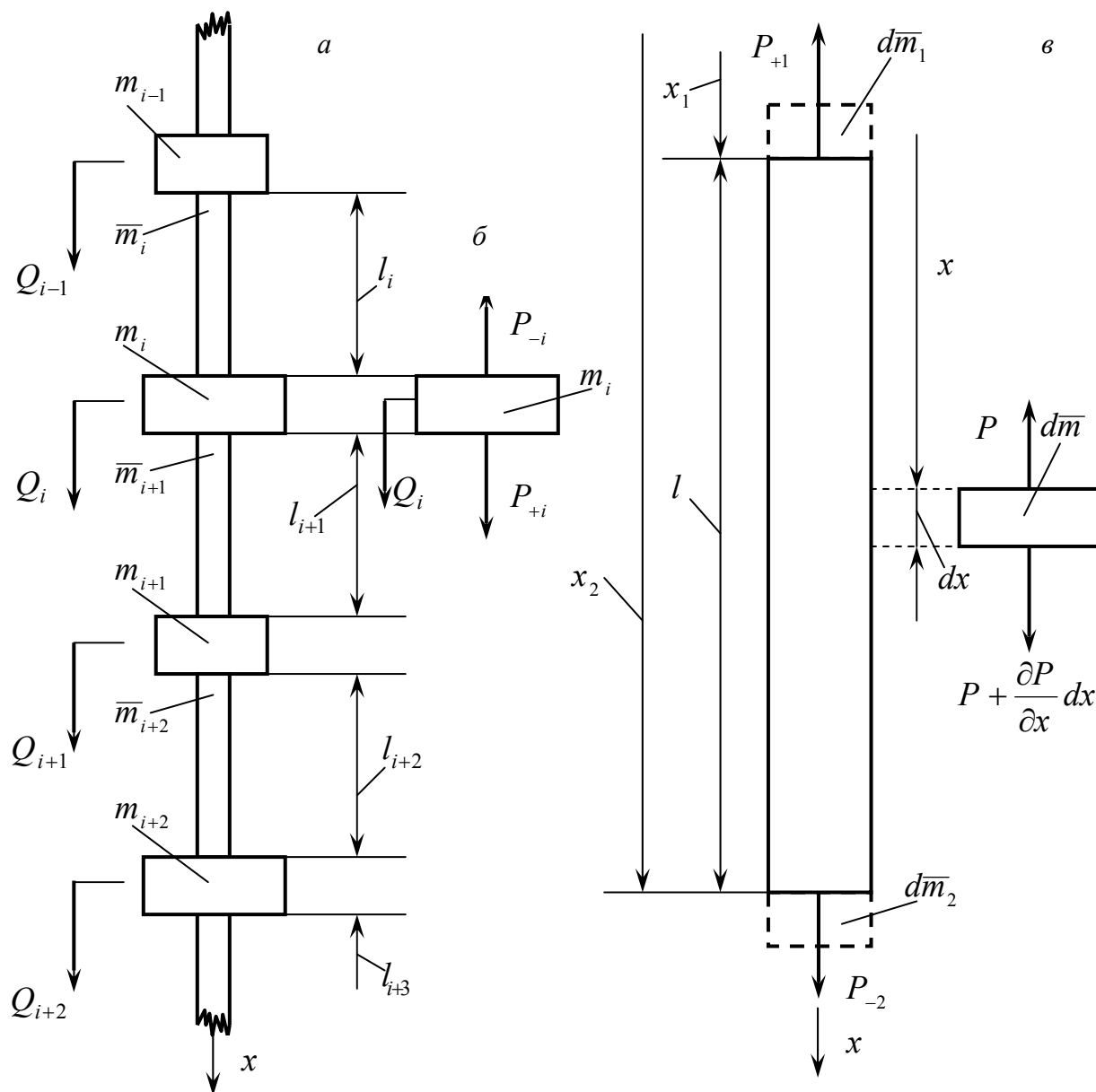


Рис.2.21. К построению уравнений движения рядной дискретно-континуальной системы с переменными параметрами: *a* – общая схема; *б* – к условию баланса сил для дискретной массы  $m_i$ ; *в* – к условию баланса сил для связи переменной длины  $l = l(t)$ ,  $\bar{m} = \bar{m}(t)$ .

Для замыкания системы уравнений (4.1) необходимо построить определяющие соотношения для реакций связей  $P_{+i}, P_{-i}$ .

### 2.6.3. Вывод уравнения движения деформируемого стержня с переменной массой

С целью пояснения особенностей построения выражений для реакций  $P_{+i}, P_{-i}$  рассмотрим последовательность вывода уравнения продольного движения деформируемого стержня переменной массы  $\bar{m}(t)$  (рис.2.21, в). Для  $\bar{m} = \text{const}$  они общеизвестны и имеют вид, аналогичный уравнениям (2.5.10).

В момент времени  $t$  количество движения деформируемого стержня  $\bar{K}_p$  составляет

$$\bar{K}_p(t) = \int_{\bar{m}} \dot{u} d\bar{m}, \quad (2.6.2)$$

а количества движения  $d\bar{K}_1, d\bar{K}_2$  присоединяемых к его концам частей  $d\bar{m}_1$  и  $d\bar{m}_2$  и имеющих скорости  $\dot{u}_1$  и  $\dot{u}_2$  соответственно равны

$$d\bar{K}_1 = \dot{u}_1 d\bar{m}_1, \quad d\bar{K}_2 = \dot{u}_2 d\bar{m}_2$$

или в сумме

$$\bar{K}(t) = \int_{\bar{m}} \dot{u} d\bar{m} + \dot{u}_1 d\bar{m}_1 + \dot{u}_2 d\bar{m}_2 = \int_{\bar{m}+\Sigma} \dot{u} d\bar{m}. \quad (2.6.3)$$

В момент времени  $t+dt$  масса стержня изменится и составит величину  $\bar{m} + d\bar{m}_1 + d\bar{m}_2$ , а количество движения получит приращения  $d\bar{K}_p + d\bar{K}_1 + d\bar{K}_2$  за счет воздействия внешних сил и сил веса, а также за счет присоединения частиц  $d\bar{m}_{1,2}$ , и в результате

$$\bar{K}(t+dt) = \int_{\bar{m}+d\bar{m}_1+d\bar{m}_2} (\dot{u} + d\dot{u}) d\bar{m} = \int_{\bar{m}} (\dot{u} + d\dot{u}) d\bar{m} + (\dot{u}_1 + d\dot{u}_1) d\bar{m}_1 + (\dot{u}_2 + d\dot{u}_2) d\bar{m}_2. \quad (2.6.4)$$

Приращение количества движения  $d\bar{K}_p$ , обусловленное только воздействием сил веса  $\bar{m}g$  и внешних сил  $P_{+1}$  и  $P_{-2}$ , приложенных к концам стержня, составляет

$$d\bar{K}_p = d \int_{\bar{m}} \dot{u} d\bar{m} - \dot{u}_1 d\bar{m}_1 - \dot{u}_2 d\bar{m}_2 = \int_{\bar{m}+d\bar{m}_1+d\bar{m}_2} (\dot{u} + d\dot{u}) d\bar{m} - \int_{\bar{m}+\Sigma} \dot{u} d\bar{m} = (P_{-2} - P_{+1} + \bar{m}g) dt. \quad (2.6.5)$$

В результате совместных преобразований соотношений (2.6.3) и (2.6.4) и пренебрежения бесконечно малыми величинами второго порядка получим

$$\frac{d}{dt} \int_{\bar{m}} i d\bar{m} - \dot{\bar{u}}_1 d\bar{m}_1 - \dot{\bar{u}}_2 d\bar{m}_2 = \int_{\bar{m}} i \ddot{d}\bar{m} - (\dot{\bar{u}}_1 - \dot{u}_1) \dot{\bar{m}}_1 - (\dot{\bar{u}}_2 - \dot{u}_2) \dot{\bar{m}}_2 = P_{-2} - P_{+1} + \bar{m}g. \quad (2.6.6)$$

Выражения  $\bar{R}_1 = (\dot{\bar{u}}_1 - \dot{u}_1) \dot{\bar{m}}_1$  и  $\bar{R}_2 = (\dot{\bar{u}}_2 - \dot{u}_2) \dot{\bar{m}}_2$  представляют собой реактивные силы, возникающие за счет взаимодействия присоединяемых масс  $d\bar{m}_1$  и  $d\bar{m}_2$  со стержнем. Если выполняются условия  $\dot{\bar{u}}_1 = \dot{u}_1$ ,  $\dot{\bar{u}}_2 = \dot{u}_2$ , то  $\bar{R}_1 = \bar{R}_2 = 0$ . Для связей типа сплошных стержней эти условия, очевидно, имеют место в большинстве практических случаев. Если же связь представляет собой цепь в виде соединенных между собой колец или пластинчатых звеньев, то ввиду имеющихся зазоров, условием  $\dot{\bar{u}}_{1,2} = \dot{u}_{1,2}$  можно пользоваться только при наличии предварительного натяжения присоединяемых частей.

Из формулы (2.6.6) вытекает правило дифференцирования интеграла по переменной массе  $\bar{m}(t)$

$$\frac{d}{dt} \int_{\bar{m}} i d\bar{m} = \int_{\bar{m}} i \ddot{d}\bar{m} + \dot{u}_1 \dot{\bar{m}}_1 + \dot{u}_2 \dot{\bar{m}}_2, \quad (2.6.7)$$

которым мы воспользуемся для получения такого выражения

$$\frac{d}{dt} \int_{\bar{m}} x d\bar{m} = \int_{\bar{m}} i \ddot{d}\bar{m} + x_1 \dot{\bar{m}}_1 + x_2 \dot{\bar{m}}_2. \quad (2.6.8)$$

Пренебрегая изменением площади поперечного сечения стержня по его длине, запишем очевидное равенство

$$\int_{\bar{m}} x d\bar{m} = \rho S \int_{x_1}^{x_2} x dx = \bar{m} \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (2.6.9)$$

После совместных преобразований (2.6.4), (2.6.6) и (2.6.7) имеем уравнение движения формируемого стержня с переменной массой

$$P_{-2} - P_{+1} + \bar{m}g = \bar{m} \frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{2} + \dot{\bar{m}} \frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2} + (\ddot{\bar{m}}_1 - \ddot{\bar{m}}_2) \frac{l}{2} + (\dot{\bar{m}}_1 - \dot{\bar{m}}_2) \frac{\dot{l}}{2} - \dot{\bar{u}}_1 \dot{\bar{m}}_1 - \dot{\bar{u}}_2 \dot{\bar{m}}_2, \quad (2.6.10)$$

которое существенно отличается от (2.6.10), поскольку содержит вместо одного (первого) – шесть слагаемых.

#### 2.6.4. Вывод определяющих соотношений для реакций связей с учетом начальных деформаций присоединяемых частей

Запишем теперь условие равновесия бесконечно малого элемента стержня, масса которого равна  $d\bar{m}$  (рис.2.21, в)

$$\frac{\partial P}{\partial x} dx + g d\bar{m} = \frac{d^2 x}{dt^2} d\bar{m} = \frac{d^2 u}{dt^2} d\bar{m} = \ddot{u} d\bar{m}. \quad (2.6.11)$$

В общем случае это условие справедливо для всех элементов стержня, кроме концевых, имеющих переменные массы  $d\bar{m}_1$ ,  $d\bar{m}_2$ . Условия равновесия этих элементов по аналогии с общеизвестной формулой И.В. Мещерского для точки переменной массы [23] запишутся так:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_{1,2}) dx + g d\bar{m}_{1,2} = \ddot{u}_{1,2} d\bar{m} - (\dot{\bar{u}}_{1,2} - \dot{u}_{1,2}) \dot{\bar{m}}_{1,2}. \quad (2.6.12)$$

Для диссипативных связей согласно модели Фойгта по аналогии с формулой (2.5.4) можно записать такое реологическое уравнение:

$$P = ES \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{\varepsilon} \right) + \mu S \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}. \quad (2.6.13)$$

где  $\bar{\varepsilon}$  - начальные деформации присоединяемых частиц.

Запись реологического уравнения в форме (2.6.13), т. е. с учетом  $\bar{\varepsilon}$ , позволяет учесть весьма важный эффект дополнительного нагружения (или разгрузки) стержня за счет присоединения к нему предварительно нагруженных элементов. Имея в виду, что

$$\frac{\partial}{\partial x}(Px) = P + x \frac{\partial P}{\partial x}, \quad x\ddot{x} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(x^2) - \dot{x}^2, \quad (2.6.14)$$

по аналогии с (2.5.7) получаем

$$P_{-2}x_2 - P_{+1}x_1 = ES(u_2 - u_1) + \mu S(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + ES \int_{x_1}^{x_2} \bar{\varepsilon} dx + \frac{1}{2} \int_{\bar{m}} \frac{d^2}{dt^2}(x^2) d\bar{m} -$$

$$-x_1(\dot{u}_1 - \dot{u}_1)\dot{\bar{m}}_1 - x_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_2)\dot{\bar{m}}_2 - \int_{\bar{m}} \dot{u}^2 d\bar{m} - g \int_{\bar{m}} x d\bar{m}. \quad (2.6.15)$$

С целью преобразования второго интеграла в уравнении (2.6.15) воспользуемся аналогией с (2.6.5) и запишем такие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\bar{m}} x d\bar{m} &= \int_{\bar{m}} \frac{d}{dt} (x^2) dt + x_1^2 \dot{\bar{m}}_1 + x_2^2 \dot{\bar{m}}_2, \\ \frac{d}{dt} \int_{\bar{m}} x \dot{u} d\bar{m} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\bar{m}} \frac{d}{dt} (x^2) d\bar{m} = \frac{1}{2} \int_{\bar{m}} \frac{d^2}{dt^2} (x^2) d\bar{m} + x_1 \dot{u}_1 \dot{\bar{m}}_1 + x_2 \dot{u}_2 \dot{\bar{m}}_2. \end{aligned} \quad (2.6.16)$$

Используя эти выражения для преобразования (2.6.15), т. е. поочередно принимая  $x_1 = 0, x_2 = l$  или  $x_2 = 0, x_1 = -l$ , получим выражения для  $P_{+1}, P_{-2}$ , а именно:

$$\begin{aligned} P_{+1} &= c(u_2 - u_1) + \eta(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - \frac{1}{3} \bar{m} \ddot{x}_1 - \frac{1}{6} \bar{m} \ddot{x}_2 - \left( \frac{2}{3} \dot{\bar{m}} - \dot{\bar{m}}_1 \right) \dot{x}_1 - \frac{1}{3} \dot{\bar{m}} \dot{x}_2 + \dot{u}_1 \dot{\bar{m}}_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} \ddot{\bar{m}} - \ddot{\bar{m}}_1 \right) l + \frac{1}{2} \bar{m} g + c \int_{l^n} \bar{\varepsilon} dx + \frac{1}{l} \left[ \frac{1}{3} \bar{m} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dot{x}_2^2) - \int_{\bar{m}} \dot{u}^2 d\bar{m} \right], \\ P_{-2} &= c(u_2 - u_1) + \eta(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + \frac{1}{3} \bar{m} \ddot{x}_2 + \frac{1}{6} \bar{m} \ddot{x}_1 + \left( \frac{2}{3} \dot{\bar{m}} - \dot{\bar{m}}_2 \right) \dot{x}_2 + \frac{1}{3} \dot{\bar{m}} \dot{x}_1 + \dot{u}_2 \dot{\bar{m}}_2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} \ddot{\bar{m}} - \ddot{\bar{m}}_2 \right) l - \frac{1}{2} \bar{m} g + c \int_{l^n} \bar{\varepsilon} dx + \frac{1}{l} \left[ \frac{1}{3} \bar{m} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dot{x}_2^2) - \int_{\bar{m}} \dot{u}^2 d\bar{m} \right], \end{aligned} \quad (2.6.17)$$

$$c = \frac{ES}{l}, \eta = \frac{\mu S}{l},$$

где  $l^n$  - длина присоединяемого участка за время  $t$ .

Изменение координат концов стержня происходит благодаря деформации, а также присоединению дополнительных частей. Поэтому с учетом принятого направления оси  $x$  можно записать такие взаимосвязи между кажущимися  $\dot{x}_{1,2}$  и истинными  $\dot{u}_{1,2}$  скоростями перемещений концов стержня

$$\dot{x}_1 = \dot{u}_1 - \frac{\dot{\bar{m}}_1}{\rho S}, \quad \dot{x}_2 = \dot{u}_2 + \frac{\dot{\bar{m}}_2}{\rho S}. \quad (2.6.18)$$

Если при раскрытии  $\int \dot{u}^2 d\bar{m}$  принять предположение линейной зависимости  $\dot{u}(x)$  и воспользоваться формулами связи между  $\dot{x}_{1,2}$  и  $\dot{u}_{1,2}$  согласно (2.5.18), то выражения в квадратных скобках (2.5.17) станут равными нулю и после некоторых преобразований из (2.5.17) получим

$$\begin{aligned} P_{+1} &= c(u_2 - u_1) + \eta(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - \frac{\bar{m}}{3}\ddot{u}_1 - \frac{\bar{m}}{6}\ddot{u}_2 + \\ &+ \frac{1}{3}(\dot{\bar{m}}_2 - 2\dot{\bar{m}}_1)(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + \dot{\bar{m}}_1(\dot{u}_1 - \dot{u}_1) + \frac{\bar{m}g}{2} + c \int_{l^n} \bar{\varepsilon} dx, \\ P_{-2} &= c(u_2 - u_1) + \eta(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + \frac{\bar{m}}{3}\ddot{u}_2 + \frac{\bar{m}}{6}\ddot{u}_1 + \\ &+ \frac{1}{3}(\dot{\bar{m}}_1 - 2\dot{\bar{m}}_2)(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - \dot{\bar{m}}_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_2) - \frac{\bar{m}g}{2} + c \int_{l^n} \bar{\varepsilon} dx. \end{aligned} \quad (2.6.19)$$

От (2.5.14) полученные соотношения отличаются четырьмя дополнительными слагаемыми, два из которых учитывают изменение массы, а остальные – силы веса и начальные деформации  $\bar{\varepsilon}$  присоединяемых участков.

### 2.6.5. Общие уравнения движения

Если по аналогии с (2.6.19) записать выражения для  $P_{+i}, P_{-i}$  и подставить их в (2.6.1), то получим

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i + \frac{\bar{m}_i}{3} \ddot{u}_{2,i} + \frac{\bar{m}_{i+1}}{3} \ddot{u}_{1,i+1} + \frac{\bar{m}_i}{6} \ddot{u}_{1,i} + \frac{\bar{m}_{i+1}}{6} \ddot{u}_{2,i+1} + k_i (\dot{u}_{2,i} - \dot{u}_{1,i}) - \\ - k_{i+1} (\dot{u}_{2,i+1} - \dot{u}_{1,i+1}) + \dot{\bar{m}}_{2,i} (\dot{u}_{2,i} - \dot{u}_{2,i}) - \dot{\bar{m}}_{1,i+1} (\dot{u}_{1,i+1} - \dot{u}_{1,i+1}) + c_i (u_{2,i} - u_{1,i}) - \\ - c_{i+1} (u_{2,i+1} - u_{1,i+1}) + c_i \int_{l_i^n} \bar{\varepsilon}_i dx - c_{i+1} \int_{l_{i+1}^n} \bar{\varepsilon}_{i+1} dx = Q_i + \left( m_i + \frac{\bar{m}_i + \bar{m}_{i+1}}{2} \right) g, \end{aligned} \quad (2.6.20)$$

$$k_i = \eta_i + \frac{1}{3} (\dot{\bar{m}}_{1,i} - 2\dot{\bar{m}}_{2,i}), \quad k_{i+1} = \eta_{i+1} + \frac{1}{3} (\dot{\bar{m}}_{2,i+1} - 2\dot{\bar{m}}_{1,i+1}).$$

Для замыкания системы уравнений (2.6.20) необходимо задать или найти из дополнительных условий выражения для  $\bar{\varepsilon}_i, \dot{\bar{u}}_i$ , а также получить взаимосвязи между величинами  $\dot{u}_{1,i+1}, \dot{u}_{2,i}$  и их соответствующими производными. Такие взаимосвязи можно определить, если принять во внимание, что согласно (2.6.18)

$$\dot{x}_{2,i} = \dot{u}_{2,i} + \frac{\dot{\bar{m}}_{2,i}}{\rho_i S_i}, \quad \dot{x}_{1,i+1} = \dot{u}_{1,i+1} - \frac{\dot{\bar{m}}_{1,i+1}}{\rho_{i+1} S_{i+1}}. \quad (2.6.18, a)$$

Имея в виду, что  $\dot{x}_{1,i+1} = \dot{x}_{2,i} = \dot{x}_i$ , из (2.6.18) находим

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \dot{u}_{2,i} + \frac{\dot{\bar{m}}_{2,i}}{\rho_i S_i} = \dot{u}_{1,i+1} - \frac{\dot{\bar{m}}_{1,i+1}}{\rho_{i+1} S_{i+1}}, & \ddot{x}_i &= \ddot{u}_{2,i} + \frac{\ddot{\bar{m}}_{2,i}}{\rho_i S_i} = \ddot{u}_{1,i+1} - \frac{\ddot{\bar{m}}_{1,i+1}}{\rho_{i+1} S_{i+1}}, \\ x_i - x_{i0} &= u_{2,i} + \int_0^t \frac{\dot{\bar{m}}_{2,i}}{\rho_i S_i} dt = u_{1,i+1} - \int_0^t \frac{\dot{\bar{m}}_{1,i+1}}{\rho_{i+1} S_{i+1}} dt. \end{aligned} \quad (2.6.21)$$

Для тех случаев, когда связи, примыкающие к дискретным массам, представляют собой сплошной вал с подвижными относительно него грузами, имеют место равенства  $\dot{u}_{2,i} = \dot{u}_{1,i+1} = \dot{u}_i$  в результате чего

$$\frac{\dot{\bar{m}}_{2,i}}{\rho_i S_i} = - \frac{\dot{\bar{m}}_{1,i+1}}{\rho_{i+1} S_{i+1}}. \quad (2.6.22)$$

Поскольку к тому же  $\dot{u}_i = \dot{u}_i$ , то уравнения (2.6.20) для подобных ситуаций примут такой вид:

$$\begin{aligned} &\left( m_i + \frac{\bar{m}_i + \bar{m}_{i+1}}{3} \right) \ddot{u}_i + \frac{\bar{m}_i}{6} \ddot{u}_{i-1} + \frac{\bar{m}_{i+1}}{6} \ddot{u}_{i+1} + k_i (\dot{u}_i - \dot{u}_{i-1}) - k_{i+1} (\dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i) + \\ &+ c_i (u_i - u_{i-1}) - c_{i+1} (u_{i+1} - u_i) + c_i \int_{l_i^n} \bar{\varepsilon}_i dx - c_{i+1} \int_{l_{i+1}^n} \bar{\varepsilon}_{i+1} dx = \\ &= Q_i + \left( m_i + \frac{\bar{m}_i + \bar{m}_{i+1}}{2} \right) \ddot{g} - m_i \ddot{l}_i^n. \end{aligned} \quad (2.6.23)$$

## 2.6.6. Оценка погрешности и достоверности основных результатов

Погрешность записи определяющих соотношений для реакций связей согласно (2.6.19) очевидно такая же, как и для (2.5.14). Поэтому все оценки, приведенные в п. 2.5.7, имеют отношение и к (2.6.19). Подтверждением достоверности соотношений (2.6.19) может служить и тот факт, что вычитая из второго выражения первое, легко приходим к уравнению движения стержня в целом (2.6.10), которое было получено нами в п. 2.6.3 другим путем. Кроме того, предполагая, что стержень

представляет собой абсолютно твердое тело, в результате чего  $\dot{u}_1 = \dot{u}_2 = \dot{u}$ , и принимая во внимание соотношение (2.6.18), получим такое уравнение:

$$P_{-2} - P_{+1} + \bar{m}g = \bar{m}\ddot{u} - (\dot{\bar{u}}_1 - \dot{u})\bar{m}_1 - (\dot{\bar{u}}_2 - \dot{u})\bar{m}_2, \quad (2.6.24)$$

откуда при  $\dot{\bar{m}}_1 = 0$  или же  $\dot{\bar{m}}_2 = 0$  получаем общеизвестное уравнение И.В.Мещерского для динамики точки переменной массы [23].

## 2.6.7. Примеры актуальных для практики задач

В качестве примеров запишем уравнения движения для некоторых частных случаев при отсутствии диссипации, т. е. при условии, что значение  $\eta_i = 0$ .

### 2.6.7.а. Уравнения динамики шахтного подъема

Для одномассовой системы согласно рис. 2.22, а при подъеме груза уравнения движения имеют наиболее простой вид, поскольку присоединение новых участков связи не происходит и поэтому следует принять  $\bar{\varepsilon} = 0$ . К тому же  $\dot{x}_2 = \dot{u}_2$ ,  $\dot{u}_1 = \dot{u}_1$ ,  $\dot{\bar{m}}_1 = \dot{\bar{m}}$ ,  $\dot{\bar{m}}_2 = 0$ , в связи с чем имеем

$$\left(m + \frac{\bar{m}}{3}\right)\ddot{u}_2 + \frac{\bar{m}}{6}\ddot{u}_1 + \frac{\dot{\bar{m}}}{3}(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + c(u_2 - u_1) = Q + \left(m + \frac{\bar{m}}{2}\right)g. \quad (2.6.24)$$

Уравнение (2.6.24) можно преобразовать к более простому виду, если ввести новую переменную  $\Delta l = u_2 - u_1$ , которая использовалась также автором работы [22] при решении аналогичной задачи. В результате несложных преобразований получим

$$\left(m + \frac{\bar{m}}{3}\right)\Delta\ddot{l} + \frac{\dot{\bar{m}}}{3}\Delta\dot{l} + c\Delta l = Q + \left(m + \frac{\bar{m}}{2}\right)(g - \ddot{u}_1). \quad (2.6.25, а)$$

При опускании груза происходит присоединение новых участков связи, которые могут иметь начальные деформации  $\varepsilon(t)$ . В связи с этим

$$\left(m + \frac{\bar{m}}{3}\right)\Delta\ddot{l} + \frac{\dot{\bar{m}}}{3}\Delta\dot{l} + c\Delta l + c \int_{l^n} \bar{\varepsilon} dx = Q + \left(m + \frac{\bar{m}}{2}\right)(g - \ddot{u}_1). \quad (2.6.26)$$

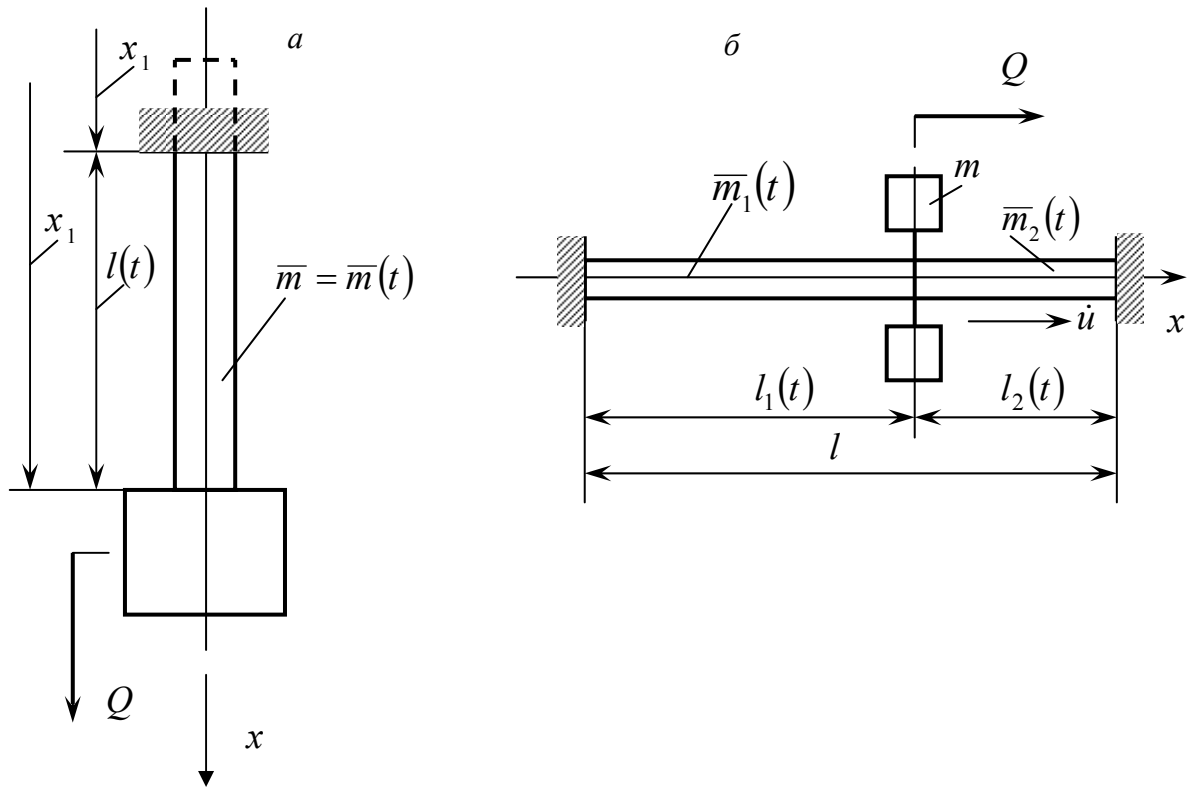


Рис.2.22. К выводу уравнений движения простейших дискретно-континуальных систем с переменными параметрами: *а* – динамическая схема шахтного подъема; *б* – динамическая схема закрепленного вала с подвижной массой

Если принять во внимание, что  $\dot{x}_1 = 0$ , то согласно (2.6.9)

$$\dot{u}_1 = \frac{\dot{\bar{m}}}{\rho S} \rightarrow \ddot{u}_1 = \frac{\ddot{\bar{m}}}{\rho S}, \quad u_1 = \int_0^t \frac{\dot{\bar{m}}}{\rho S} dt = l^n.$$

Наряду с (2.6.25, а) и (2.6.26) запишем также и выражения для динамических нагрузок на концах каната

$$P_{-2} = c(u_2 - u_1) + \frac{\bar{m}}{3} \ddot{u}_2 + \frac{\bar{m}}{6} \ddot{u}_1 + \frac{1}{3} \dot{\bar{m}}(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - \frac{\bar{m}g}{2} + c \int_{l^n} \bar{\varepsilon} dx,$$

$$P_{+1} = c(u_2 - u_1) - \frac{\bar{m}}{3} \ddot{u}_1 - \frac{\bar{m}}{6} \ddot{u}_2 - \frac{2}{3} \dot{\bar{m}}(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + \frac{\bar{m}g}{2} + c \int_{l^n} \bar{\varepsilon} dx. \quad (2.6.19, a)$$

В случае подъема каната последние слагаемые в (2.6.19, а), очевидно, будут отсутствовать.

Следует иметь в виду, что для  $Q = \text{const}$  в режиме равномерного опускания груза ( $\ddot{u}_1 = 0$ ) предварительное нагружение присоединяемых участков связи до величины  $\left(m + \frac{\bar{m}}{2}\right)g$  исключает возникновение параметрических колебаний. К тому же второй член левой части уравнения (2.6.26) играет роль демпфирующей силы, поскольку  $\dot{\bar{m}} > 0$ , и в ряде случаев его влияние на величину нагружения связи невелико. Однако, при подъеме груза, когда  $\dot{\bar{m}} < 0$ , вклад второго члена в нагружение связи может оказаться весьма существенным, поскольку в данном случае его роль сводится не к демпфированию, а к усилению колебаний. Согласно данным [20, стр.18] многими исследователями показано, что при опускании груза с произвольной постоянной скоростью колебания всегда затухают, а при подъеме с некоторой скоростью начинают возрастать.

При затяжных подъемах с помощью канатов с незначительной внутренней диссипацией это может привести к возникновению больших динамических нагрузок, если не принять меры, направленные на гашение колебаний. Необходимо также учитывать, что для гибких связей типа канатов, динамическая составляющая нагрузки не должна превышать статическую, так как канаты не оказывают сопротивления сжатию. В противном случае это может привести к известному в практике “подпрыгиванию” груза.

Уравнение аналогичное по виду с (2.6.26) получено также автором работы [22]. Однако, принятое им допущение о линейной зависимости  $u(x)$  при преобразованиях буквально всех слагаемых промежуточных выражений привело к расхождению между вторыми членами в его окончательном уравнении и в (2.6.26). Для линейных уравнений, когда  $\dot{\bar{m}} = 0$ , такое совпадение, как следует из [22], является полным.

Необходимо также заметить, что упомянутое допущение не позволило ни одному из авторов, занимавшихся исследованием различными приближенными методами этой задачи в том числе и при  $\dot{\bar{m}} = 0$ , поставить вопрос о возможности существенного различия динамических нагрузок на противоположных концах связи, определяемых согласно (2.6.19), хотя из анализа самих уравнений такое

различие вытекает. Возможность получения подобного следствия ускользнула из поля зрения этих авторов очевидно потому, что предположение о линейной зависимости  $u(x)$ , положенное в основу при выводе уравнений, непременно приводит к результату  $\partial u / \partial x = \text{const}$  и в этой связи к следствию о постоянстве динамической нагрузки по всей длине связи.

Критический анализ отмеченной выше несогласованности в трудах предшественников позволяет сделать чрезвычайно важный вывод, имея в виду, что такая же несогласованность имеет место и в результате Релея для  $\bar{m} = \text{const}$ . Вывод состоит в том, что даже при существенном ограничении допущения о линейном характере  $u(x)$ , оно предполагает выбор не произвольного, а одного из возможных классов движения связи. Именно поэтому более общие уравнения, описывающие движение дискретных масс и полученные для каждого из этих возможных классов, должны в некоторой степени совпадать. В этом, очевидно, и кроется причина того, что результаты, полученные на основе упомянутого допущения, и более корректные, вытекающие из рассмотренных уравнений, мало отличаются между собой, а само допущение не вытекает из выведенных на его же основе соотношений.

#### 2.6.7.в. Уравнения динамики вала с подвижной массой

Рассмотрим теперь колебательную систему, состоящую из однородного горизонтального вала с закрепленными концами, между которыми находится подвижная дискретная масса (рис.2.22. б). Направление движения массы указано стрелкой.

Поскольку  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ ,  $S_1 = S_2 = S$ , то  $\dot{\bar{m}}_1 = -\dot{\bar{m}}_2$  и поэтому уравнение движения имеет вид

$$\left(m + \frac{\bar{m}}{3}\right)\ddot{u} + (c_1 + c_2)u + c_1 \int_{l^n} \bar{\varepsilon} dx = Q - m\ddot{l}_1. \quad (2.6.27)$$

Принимая во внимание, что  $\ddot{\bar{m}} / \rho S = \ddot{l}_1$ ,  $dx = l dt$ , уравнение (2.6.27) можно записать так

$$\frac{1}{c_1} \left(m + \frac{\bar{m}}{3}\right)\ddot{u} + \frac{1}{c_1} (c_1 + c_2)u + \int_0^t \bar{\varepsilon} \dot{l}_1 dt = \frac{1}{c_1} (Q - m\ddot{l}_1). \quad (2.6.28)$$

Величина начальной деформации  $\bar{\varepsilon}$  может быть определена из следующих соображений. За время  $dt$  дискретная масса переместится вдоль вала так, что к его участку  $l_1$  присоединится отрезок  $dx = \dot{l}_1 dt$ , принадлежавший до момента присоединения участку  $l_2$ . Поэтому начальная деформация  $\bar{\varepsilon}$  отрезка  $dx$  может быть определена по величине нагрузки  $P_{-2}$  на конце участка  $l_2$ , примыкающего к дискретной массе, т. е.  $\varepsilon = P_{-2} / ES$ .

В свою очередь согласно (2.6.19)

$$P_{-2} = -c_2 u - \frac{\bar{m}_2}{3} \ddot{u} + \frac{2}{3} \dot{\bar{m}} \dot{u}. \quad (2.6.29)$$

После подстановки выражения для  $\varepsilon$  с учетом (2.6.29) получим интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{l_1}{ES} \left( m + \frac{\bar{m}}{3} \right) \ddot{u} + \frac{l}{l_2} u - \int_0^t \left( \frac{l}{l_2} u - \frac{\rho l_1}{3E} \ddot{u} - \frac{2\rho l_1}{3E} \dot{u} \right) dt = \frac{l_1}{ES} (Q - m\ddot{l}_1), \quad (2.6.30)$$

которое в результате дифференцирования по времени может быть преобразовано в дифференциальное уравнение третьего порядка.

### 2.6.8. Краткие выводы

В результате распространения интегрального метода на многомассовые дискретно-континуальные системы с переменными массами связей получены определяющие соотношения для реакций связей и на их основе - общие уравнения динамики системы. Из общих уравнений, как частные случаи вытекают уравнения динамики шахтного подъема, а также знаменитое уравнение динамики точки переменной массы (И.В. Мещерского). Уравнения динамики шахтного подъема в отличие от предложенных другими авторами позволяют учитывать различия динамических нагрузок на обоих концах каната.

Достоверность уравнений подтверждается доказательствами, выполненными иным путем, совпадением частных случаев, вытекающих из этих уравнений, с результатами других авторов, а также качественным совпадением очевидных следствий уравнений с выводами, полученными многими исследователями асимптотическими и численными методами.

Полученные уравнения могут быть использованы для решения многочисленных практических задач, некоторые примеры которых представлены на рис. 2.20.

Рассмотренные выше результаты достаточно полно изложены в [24].

### **2.6.9. Контрольные вопросы**

1. Приведите примеры дискретно-континуальных систем с переменными параметрами, получившие применение в технике.
2. Запишите незамкнутую систему уравнений движения сосредоточенных масс рядной дискретно-континуальной системы с переменными параметрами связей. Укажите, какие зависимости нужны для замыкания этой системы.
3. Расскажите в общих чертах о сущности подхода к построению определяющих соотношений для реакций связей, имеющих изменяющуюся во времени распределенную по их длине массу.
4. Расскажите в общих чертах о подходе к выводу уравнения движения деформированного стержня с переменной массой.
5. Запишите реологическое уравнение, используемое для вывода определяющих соотношений для реакций связи с переменной массой. Чем отличается это уравнение от аналогичного уравнения в случае связей с постоянной массой?
6. Какой важный эффект можно описать, если учесть начальные деформации присоединяемых к концам связи отдельных частиц?
7. Запишите определяющие соотношения для реакций связи с переменной массой и покажите, чем они отличаются от аналогичных соотношений для связи с постоянной массой.
8. Приведите аргументы, свидетельствующие о достоверности определяющих соотношений для связи с переменной массой.
9. Запишите уравнение движения одномассовой системы с переменной массой связи применительно к задаче о подъеме груза (динамика шахтного подъема).
10. Поясните, почему уравнение движения для задачи динамики шахтного подъема для случаев опускания и подъема груза отличаются между собой дополнительным членом.
11. Запишите определяющие соотношения для динамических нагрузок на концах каната в случаях подъема и опускания груза.

12. Какую роль играет член, зависящий от скорости движения, в случаях подъема и опускания груза?
13. Почему в канатах динамическая составляющая нагрузки не должна превышать статическую составляющую? К чему это может привести на практике?
14. К чему приводит предположение о линейной зависимости  $u(x)$ , используемое различными авторами, при выводе основных уравнений задачи шахтного подъема?
15. Расскажите в общих чертах о выводе уравнения динамики вала с подвижной массой.
16. Покажите, что уравнение динамики точки переменной массы, полученное И.В. Мещерским, вытекает, как частный случай, из рассмотренных выше соотношений.

## **2.7. Распространение интегрального метода на трехмерные объекты**

Рассмотренный в 2.2.5 интегральный метод обладает достаточно большой степенью общности и может быть использован для решения различных задач. Так, очевидно, если в (2.5.19) под символом  $M$  иметь в виду изгибающий момент, то, используя аналогичные изложенным в п.2.5 соображения, получим определяющие соотношения и общие уравнения для изгибных колебаний дискретно - континуальной системы.

Наряду с одномерными системами, рассмотренными выше, метод может быть распространен и на пространственные объекты.

### **2.7.1. Осреднение компонент тензора напряжений**

Рассмотрим очевидные соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(x_j R_j) = R_j + x_j \frac{\partial R_j}{\partial x_j}, \quad (j=1,2,3), \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j R_i) = x_j \frac{\partial R_i}{\partial x_i}, \quad (i \neq j), \quad (2.7.1)$$

где  $R_{i,j,m}$  - произвольные непрерывные вместе со своими частными производными требуемого порядка функции трех пространственных переменных  $x_j$  ( $j=1,2,3$ ) и времени  $t$ , причем  $x_j = x_j(t)$ .

Поскольку индексы  $i, j, m$  могут принимать значения 1,2,3, то общее количество таких соотношений в нашем случае будет равно девяти.

Складывая каждые три соотношения системы (2.7.1) с одинаковыми индексами при  $x_j$  и интегрируя по объему тела  $V$ , получим

$$\begin{aligned} \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (x_j R_1) + \frac{\partial}{\partial x_j} (x_j R_2) + \frac{\partial}{\partial x_m} (x_j R_3) \right] dV = \\ = \int_V R_j dV + \int_V x_j \left( \frac{\partial R_1}{\partial x_1} + \frac{\partial R_2}{\partial x_2} + \frac{\partial R_3}{\partial x_3} \right) dV. \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

Преобразуя объемный интеграл левой части (2.7.2) в интеграл по поверхности, затем полагая, что величины  $R_j$  являются компонентами тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ , и имея в виду, что

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho \bar{\Phi}_i = \rho \frac{d^2 x_i}{dt^2}, \quad j=1,2,3, \quad (2.7.3)$$

из (2.7.2) находим выражения для средних напряжений

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV = \langle \sigma_{ij} \rangle &= \frac{1}{V} \int_S x_j q_j dS + \frac{1}{V} \int_V x_j \rho \Phi_j dV, \\ \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV = \langle \sigma_{ij} \rangle &= \frac{1}{V} \int_S x_j q_i dS + \frac{1}{V} \int_V x_j \rho \Phi_i dV, \\ \Phi_j &= \bar{\Phi}_j - \frac{d^2 x_j}{dt^2}. \end{aligned} \quad (2.7.4)$$

Если  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , то выражение для  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  можно преобразовать к такому виду:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \int_S (x_j q_i + x_i q_j) dS + \frac{1}{2V} \int_V \rho (x_j \Phi_i + x_i \Phi_j) dV, \quad (2.7.5)$$

где  $q_i$  - плотности поверхностных сил;  $\bar{\Phi}_j$  - проекции единичной массовой силы на оси координат.

В таком виде уравнения (2.7.5) были получены раньше другим автором (на основе теоремы взаимности Бетти) [25]. Из них наглядно вытекают первые уравнения (2.7.4).

### 2.7.2. Вывод определяющих соотношений для тела в целом

Уравнения движения в напряжениях (2.7.3), записанные для элементарного объема, на основе формулы Остроградского - Гаусса общеизвестным способом преобразуются в соответствующие уравнения для тела в целом. Что касается аналогичного перехода для определяющих соотношений, то он тоже может быть осуществлен, хотя и не так просто, как для уравнений движения.

Если пренебречь влиянием массовых сил ( $\bar{\Phi}_i = 0$ ) и учесть, взаимосвязь  $\rho dV = dm$ , а также принять во внимание формулу

$$x_j \frac{d^2 x_j}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (x_j)^2 - \left( \frac{dx_j}{dt} \right)^2, \quad (2.7.6)$$

то второй интеграл в первом соотношении (2.7.4), если  $m = \text{const}$ , можно записать так:

$$-\int_V x_j \Phi_j \rho dV = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int_m x_j^2 dm - \int_m \left( \frac{dx_j}{dt} \right)^2 dm. \quad (2.7.7)$$

Первый интеграл в формуле (2.7.7) представляет собой планарный момент инерции массы  $J_{nj}$ , второй - удвоенное значение составляющей кинетической энергии  $W_j$ .

После соответствующих подстановок первое соотношение (2.7.4) можно записать так:

$$\langle \sigma_{jj} \rangle = \frac{1}{V} \int_S x_j q_j dS - \frac{1}{2V} \frac{d^2 J_{nj}}{dt^2} + \frac{2W_j}{V}. \quad (2.7.8)$$

В результате подстановки (2.7.6) в соотношении (2.7.5) под знаком объемного интеграла появится выражение

$$x_j \frac{d^2 x_i}{dt^2} + x_i x_j \frac{d^2 x_j}{dt^2} = \frac{d^2 (x_i x_j)}{dt^2} - 2 \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt}, \quad (2.7.9)$$

и в конечном итоге, если  $m = \text{const}$ ,

$$-\int_V \rho (x_j \Phi_i + x_i \Phi_j) dV = \frac{d^2}{dt^2} \int_m x_i x_j dm - 2 \int_m \left( \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \right) dm. \quad (2.7.10)$$

Тогда выражение для  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  принимает вид

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \int_S (x_j q_i + x_i q_j) dS - \frac{1}{2V} \frac{d^2 J_{ij}}{dt^2} + \frac{2W_{ij}}{V}, \quad (2.7.11)$$

где  $J_{ij} = \int_m x_i x_j dm$  - центробежный момент инерции;  $W_{ij} = \frac{1}{2} \int_m \dot{x}_i \dot{x}_j dm$  - член, характеризующий составляющие кинетической энергии тела  $W_i$  и  $W_j$ .

Выражение для  $W_{ij}$  можно записать так:

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \int_m \dot{x}_i \dot{x}_j dm = \frac{1}{4} \int_m [(\dot{x}_i + \dot{x}_j)^2 - \dot{x}_i^2 - \dot{x}_j^2] dm, \quad (2.7.12)$$

откуда видно, что  $W_{ij}$  следует рассматривать как некоторый аналог смешанной составляющей кинетической энергии. Однако, в отличие от  $W_i$  величина  $W_{ij}$  не обязательно положительная.

Соотношения (2.7.8) и (2.7.11) после подстановки соответствующих выражений для  $\sigma_{ij}$ , например согласно законам Гука, Ньютона или другим, как раз и будут теми, которые определяют взаимосвязи между кинематическими и динамическими параметрами для тела в целом. Однако для их получения необходимо осуществить осреднение кинематических параметров, входящих в определяющие соотношения для макрообъема.

Для закона Гука в качестве кинематических параметров выступают компоненты тензора малых деформаций  $\varepsilon_{ij}$ . Поэтому с целью получения выражений  $\varepsilon_{ij}$  рассмотрим некоторые предварительные соображения. Для этого получим взаимосвязи между средними и характерными размерами деформируемого тела (рис.2.23).

Пусть  $a_i$  - длина произвольного материального отрезка (волокна) в направлении  $x_i$ , принадлежащего данному деформированному телу. Последнее означает, что  $a_i$  может представлять собой не только цельное волокно, но и сумму нескольких отрезков, если тело содержит пустоты или же имеет впадины на поверхности. Обозначим через  $a_{ij}$  величину материальной площадки, т.е. площади поперечного сечения тела, параллельной координатной плоскости  $x_i x_j$ . Символами  $S_{ij}^{\max}$  и

$a_j^{\max}$  обозначим площадь проекции тела на координатную плоскость  $x_i$   $x_j$  и габаритный размер этой проекции в направлении  $x_j$ , а символом  $V$  - объем тела. Условимся также через  $S_{nj}$  обозначать площадку (сечение) нормальную к направлению  $x_j$ .

Между средними  $\langle a_i \rangle$ ,  $\langle F_{ij} \rangle$  и характерными  $S_{ni}^{\max}$ ,  $a_m^{\max}$  размерами тела имеют место очевидные соотношения

$$\langle a_i \rangle = \frac{1}{S_{ni}^{\max}} \int_{a_{ni}^{\max}} a_i dS_{ni}^{\max}, \quad \langle S_{ij} \rangle = \frac{1}{a_m^{\max}} \int_{a_m^{\max}} S_{ij} da_m^{\max}. \quad (2.7.13)$$

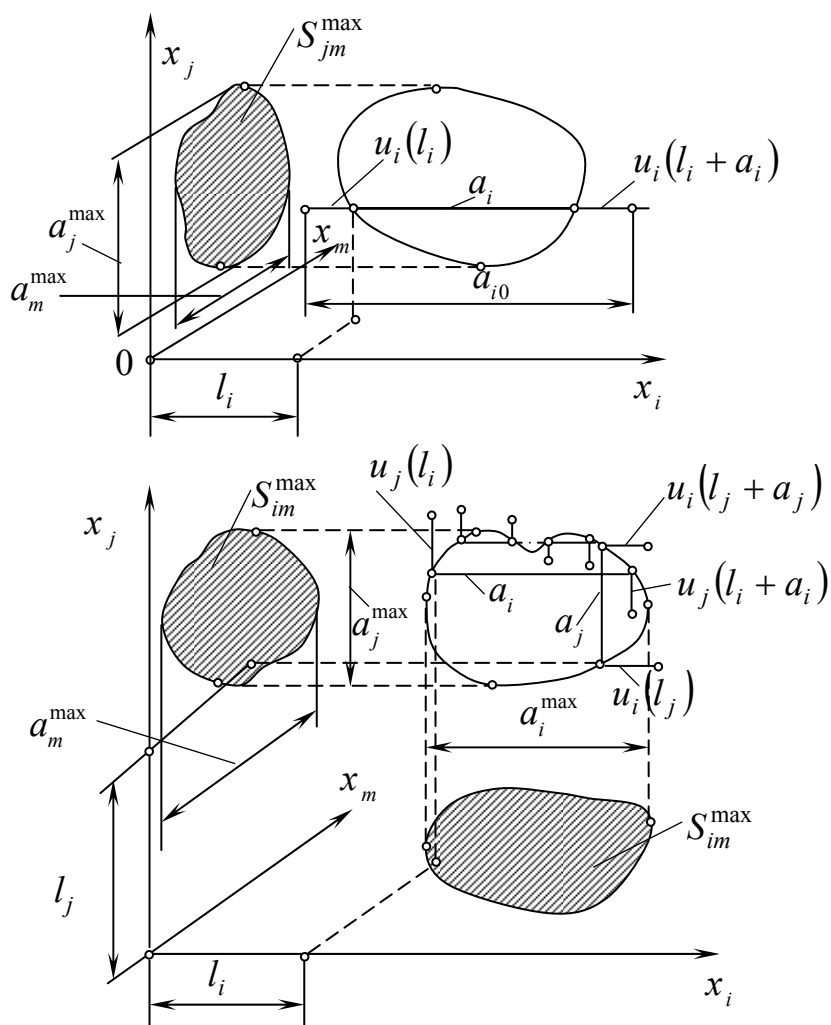


Рис.2.23. К определению характерных размеров тела

Если принять во внимание, что каждый из интегралов в (2.7.13) представляет собой объем тела  $V$ , то

$$\langle a_i \rangle = \frac{V}{S_{ni}^{\max}}, \quad \langle S_{ij} \rangle = \frac{V}{a_m^{\max}}, \quad (2.7.14)$$

Для начального (недеформированного) состояния выражения для средних размеров формально будут такими же, но все входящие в них величины следует снабдить индексами “0”, а именно:

$$\langle a_{i0} \rangle = \frac{V_0}{S_{ni0}^{\max}}, \quad \langle S_{ij0} \rangle = \frac{V_0}{a_{m0}^{\max}}. \quad (2.7.15)$$

Запишем теперь общеизвестные выражения для компонент тензора малых деформаций [17]

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad 2\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \quad (2.7.16)$$

которые после осреднения по объему тела  $V$  с учетом (2.7.14) принимают следующий вид:

$$\langle \varepsilon_{ii} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ii} dV = \frac{\langle \Delta_i u_i \rangle}{\langle a_i \rangle},$$

$$2 \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV = \frac{\langle \Delta_i u_j \rangle}{\langle a_i \rangle} + \frac{\langle \Delta_j u_i \rangle}{\langle a_j \rangle}, \quad (2.7.17)$$

где  $u_i$  - компоненты перемещения в направлении  $x_i$ ;  $\Delta_i u_i$ ,  $\Delta_i u_j$ -разности перемещений концов отрезка  $a_i$  в направлении  $x_i$  и по нормали к нему  $x_j$  соответственно.

Если материальный отрезок  $a_i$  состоит из нескольких частей, то величины  $\Delta_i u_i, \Delta_i u_j$  представляют собой суммы разностей перемещений концов этих частей (рис.2.23).

Выражения для средних деформаций в несколько иной, но преобразуемой к виду (2.7.17) форме, были получены ранее в[25].

Если учесть, что в случае малых перемещений и малых деформаций

$$\Delta_i u_i = a_i - a_{i0},$$

то выражение для  $\langle \varepsilon_{ii} \rangle$  принимает вид

$$\langle \varepsilon_{ii} \rangle = \frac{\langle a_i - a_{i0} \rangle}{\langle a_i \rangle} = \frac{\langle a_i \rangle - \langle \bar{a}_{i0} \rangle}{\langle a_i \rangle}. \quad (2.7.18)$$

Величина  $\langle \bar{a}_{i0} \rangle$ , вообще говоря, не является средним значением отрезка  $a_{i0}$  в начальном состоянии, поскольку

$$\langle \bar{a}_{i0} \rangle = \frac{1}{S_{ni}^{\max}} \int_{a_{ni}^{\max}} a_{i0} dS_{ni}^{\max}, \quad (2.7.19)$$

т.е. интегрирование производится не по начальной  $S_{ni0}^{\max}$ , а по конечной площадке  $S_{ni}^{\max}$ .

Интеграл в выражении

$$\langle a_{i0} \rangle = \frac{1}{S_{ni0}^{\max}} \int_{F_{ni0}^{\max}} a_{i0} dS_{ni0}^{\max} \quad (2.7.20)$$

представляет собой начальное значение объема тела  $V_0$ , а в предыдущем выражении - его возможное значение  $\bar{V}_0$ , когда  $\varepsilon_{ii} = 0$ . Таким образом, с учетом малости деформаций ( $\varepsilon_{ij} \ll 1$ ) при  $\varepsilon_{ii} = 0$  можно полагать

$$\frac{\bar{V}_0}{V_0} \approx \frac{S_{ni}^{\max}}{S_{ni0}^{\max}} \Rightarrow \bar{V}_0 = \frac{\bar{V}_0 S_{ni}^{\max}}{S_{ni0}^{\max}}. \quad (2.7.21)$$

Подставляя (2.7.21) в (2.7.19) приходим к заключению, что  $\langle \bar{a}_{i0} \rangle \approx \langle a_{i0} \rangle$  и поэтому из (2.7.18) следует

$$\langle \varepsilon_{ii} \rangle = 1 - \frac{\langle a_{i0} \rangle}{\langle a_i \rangle}. \quad (2.7.18, \text{ а})$$

Имея в виду, что  $\langle a_{i0} \rangle / \langle a_i \rangle \approx 1$  от (2.7.18, а) приходим к более привычному выражению (деформация Лагранжа, см. формулу (1.2.1))

$$\langle \varepsilon_{ii} \rangle = \frac{\langle a_i \rangle}{\langle a_{i0} \rangle} - 1. \quad (2.7.18, \text{ б})$$

После подстановки соответствующих выражений из (2.7.14) и (2.7.15) в (2.7.18, а) имеем

$$\langle \varepsilon_{ii} \rangle = \frac{VS_{ni0}^{\max}}{V_0 S_{ni}^{\max}} - 1. \quad (2.7.18, \text{ г})$$

Последняя зависимость для  $\langle \varepsilon_{ii} \rangle$  содержит только характерные размеры тела, которые можно определить непосредственно путем измерений.

Выражение для осредненной объемной деформации согласно (2.7.16) принимает вид

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle \varepsilon_{22} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle = \frac{V}{V_0} - 1. \quad (2.7.22)$$

Если принять во внимание, что каждая составляющая  $\langle \varepsilon_{ii} \rangle$  представляет собой относительное изменение объема тела при равенстве нулю двух других составляющих, то соотношение (2.7.22) в пределах линейной теории не вызывает сомнений.

Для получения окончательных выражений (2.7.8) и (2.7.11) в случае упругого тела необходимо воспользоваться общеизвестными выражениями обобщенного закона упругости [17], который в осредненном виде запишем так:

$$\langle \sigma_{jj} \rangle = 2G \langle \varepsilon_{jj} \rangle + K \langle \varepsilon \rangle,$$

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = 2G \langle \varepsilon_{ij} \rangle. \quad (2.7.23)$$

Воспользуемся также и соответствующими выражениями (2.7.17), (2.7.22) для осредненных деформаций, после чего подставим их в (2.7.8) и (2.7.11). Для  $\langle \varepsilon_{jj} \rangle$  можно также воспользоваться соотношением (2.7.18, г), которое содержит лишь характерные размеры тела. В таком случае из соотношений (2.7.8) и (2.7.11) получим такие уравнения:

$$2G \left( \frac{VS_{nj0}^{\max}}{V_0 S_{nj}^{\max}} - 1 \right) + K \left( \frac{V}{V_0} - 1 \right) = \frac{1}{V} \int_S x_j q_j dS - \frac{1}{2V} \frac{d^2 J_{nj}}{dt^2} + \frac{2W_j}{V},$$

$$G \left( \frac{\langle \Delta_i u_j \rangle}{\langle a_i \rangle} + \frac{\langle \Delta_j u_i \rangle}{\langle a_j \rangle} \right) = \frac{1}{2V} \int_S (x_j q_i + x_i q_j) dS - \frac{1}{2V} \frac{d^2 J_{ij}}{dt^2} + \frac{2W_{ij}}{V}. \quad (2.7.24)$$

Для статического нагружения тела соотношения (2.7.24) существенно упрощаются, поскольку два последних слагаемых можно не учитывать, и тогда

$$2G \left( \frac{VS_{nj0}^{\max}}{V_0 S_{nj}^{\max}} - 1 \right) + K \left( \frac{V}{V_0} - 1 \right) = \frac{1}{V} \int_S x_j q_j dS,$$

$$G \left( \frac{\langle \Delta_i u_j \rangle}{\langle a_i \rangle} + \frac{\langle \Delta_j u_i \rangle}{\langle a_j \rangle} \right) = \frac{1}{2V} \int_S (x_j q_i + x_i q_j) dS. \quad (2.7.25)$$

В случае необходимости выражение в скобках с коэффициентом  $2G$  можно заменить другими согласно (2.7.17), (2.7.18), (2.7.18, а) или (2.7.18, б).

### 2.7.3. Примеры

Полученные определяющие соотношения для тела в целом могут быть использованы при решении различных прикладных задач, имеющих важное значение и для практики, и для теории.

**Пример 1.** Используя только первое уравнение (2.7.25), по-видимому, можно экспериментально определять упругие константы на образцах произвольной формы при достоверной информации об интенсивности поверхностного нагружения.

И действительно, для одноосного нагружения тела первую формулу (2.7.23) можно записать, используя только одну константу, т.е. модуль упругости Юнга  $E$

$$\langle \sigma_{jj} \rangle = E \langle \varepsilon_{jj} \rangle. \quad (2.7.26)$$

В этом случае первое уравнение (2.7.25) принимает вид

$$\frac{1}{V} \int_F x_j q_j dS = E \left( \frac{VS_{nj0}^{\max}}{V_0 S_{nj}^{\max}} - 1 \right). \quad (2.7.27)$$

Для исследуемого образца в виде стержня постоянного сечения, к торцевым поверхностям которого приложены постоянные внешние нагрузки интенсивностью  $q_x$ , из (2.7.27) имеем

$$\frac{1}{V} \left( x_2 \int_S q_x(x_2) dS - x_1 \int_S q_x(x_1) dF \right) = E \left( \frac{VS_0}{V_0S} - 1 \right). \quad (2.7.28)$$

Из условия равновесия стержня интегралы должны давать одну и ту же величину силы  $P_x$ , приложенной к его концам. Тогда из (2.7.28) получим общеизвестный результат

$$\frac{P_x(x_2 - x_1)}{V} = E \left( \frac{VS_0}{SV_0} - 1 \right) \Rightarrow \sigma_x = E \frac{l - l_0}{l_0}, \quad (2.7.29)$$

который подтверждает достоверность определяющих соотношений (2.7.25) и возможность определения из эксперимента упругих констант для тела произвольной формы.

**Пример 2.** Соотношения (2.7.25) могут быть использованы, например, для дальнейшего развития теории эффективных модулей пористых сред. Последней проблеме посвящено огромное количество публикаций, представление о которых можно получить из обзоров, рассматриваемых в монографиях [26–28]. Трудности, которые возникают при решении этой проблемы, породили множество подходов и развиваемых на их основе методов. Применение соотношений (2.7.25) позволяет существенно облегчить решение проблемы, что хорошо видно из приведенного ниже примера.

Будем рассматривать содержащий достаточно много пор (представительный) макрообъем упругой пористой среды  $\Delta \bar{V} = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ , заведомо предполагая, что его механические свойства не зависят от ориентации декартовой системы координат  $x_i (i = 1, 2, 3)$ , т. е. пористая среда в целом, как и вещество, из которого она состоит (каркас), является изотропной.

Предположим, что каркас тоже является идеально упругим и в этой связи для каждого его микрообъема  $dV = dx_1 dx_2 dx_3$  можно записать известные [17] соотношения

$$e_{ii} = \frac{1}{E} [\tau_{ii} - \nu (\tau_{jj} + \tau_{kk})], \quad (i=1, 2, 3), \quad (2.7.30)$$

осредняя которые по объему каркаса  $\Delta V$ , т. е. по сплошной части макрообъема пористой среды  $\Delta \bar{V}$ , получим

$$\langle e_{ii} \rangle = \frac{1}{E} [\langle \tau_{ii} \rangle - \nu (\langle \tau_{jj} \rangle + \langle \tau_{kk} \rangle)], \quad (2.7.31)$$

где  $e_{ii}$ ,  $\tau_{ii}$  - нормальные компоненты тензоров микродеформаций и микронапряжений соответственно;  $\nu$  - коэффициент Пуассона.

Запишем очевидные соотношения между средними микронапряжениями  $\langle \tau_{ii} \rangle$  и макронапряжениями  $\sigma_{ii}$

$$\langle \tau_{ii} \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_V \tau_{ii} dV = \frac{1}{k\Delta\bar{V}} \int_{\Delta x_i} \left( \int_{\Delta F_{jk}} \tau_{ii} dS_{jk} \right) dx_i = \frac{\sigma_{ii}}{k}, \quad (2.7.32)$$

где  $k = \Delta V / \Delta\bar{V}$  - сплошность пористой среды;  $\Delta S_{jk}$  - сплошная часть макроплощадки  $\Delta\bar{S}_{jk} = \Delta x_j \Delta x_k$ .

Средние микродеформации  $\langle e_{ii} \rangle$ , очевидно, характеризуют продольные деформации сплошной части отрезков  $\Delta x_i$ . И действительно

$$\langle e_{ii} \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV = \frac{1}{k\Delta\bar{V}} \int_{\Delta\bar{S}_{jk}} (a_i - a_{i0}) d\bar{S}_{jk} = 1 - \frac{1}{k\Delta\bar{V}} \int_{\Delta\bar{S}_{jk}} a_{i0} d\bar{S}_{jk}, \quad (2.7.33)$$

где  $a_i$ ,  $a_{i0}$  - суммарные длины сплошных частей отрезка  $\Delta x_i$  в конечном и начальном состояниях пористой среды соответственно.

Выражение для интеграла от длины сплошной части отрезка в начальном состоянии  $a_{i0}$  по конечной площадке  $\Delta\bar{S}_{jk}$  можно записать в таком виде:

$$\int_{\Delta\bar{S}_{jk}} a_{i0} d\bar{S}_{jk} = [\Delta\bar{V}(1 - \varepsilon_{ii})] k_i, \quad (2.7.34)$$

если пренебречь поворотами и предположить, что все части  $a_{i0}$ , как и  $a_i$ , тоже находятся на одной прямой ввиду малости деформаций ( $\varepsilon_{ii} \ll 1$ ).

С учетом (2.7.34) выражение (2.7.33) принимает вид

$$\langle e_{ii} \rangle = 1 - \frac{k_i}{k} (1 - \varepsilon_{ii}), \quad (2.7.35)$$

где  $k_i$  - сплошность среды в некотором условном конечном состоянии

макрообъема (при отсутствии компоненты макродеформации  $\varepsilon_{ii}$ ).

Подставим теперь выражения для  $\langle \tau_{ii} \rangle$  и  $\langle e_{ii} \rangle$  согласно (2.7.32) и (2.7.35) в соотношения (2.7.31) и в результате получим

$$k - k_i(1 - \varepsilon_{ii}) = \frac{1}{E} [\sigma_{ii} - \nu(\sigma_{jj} + \sigma_{kk})], \quad (i=1,2,3). \quad (2.7.36)$$

Вычтем попарно эти соотношения одно из другого. Тогда, имея в виду, что  $E = 2G(1 + \nu)$ , находим

$$\sigma_{ii} - \sigma_{jj} = 2G [k_j(1 - \varepsilon_{jj}) - k_i(1 - \varepsilon_{ii})]. \quad (2.7.37)$$

Но для макрообъема изотропной среды можно записать [17]

$$\sigma_{ii} - \sigma_{jj} = 2G_s(\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj}), \quad (2.7.38)$$

где  $G_s$  - эффективный модуль Гука пористой среды.

Приравняв правые части (2.7.37) и (2.7.38), имеем

$$G[k_j(1 - \varepsilon_{jj}) - k_i(1 - \varepsilon_{ii})] = G_s(\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj}), \quad (2.7.39)$$

откуда следует такое соотношение:

$$\frac{G_s}{G} = \frac{k_j(1 - \varepsilon_{jj}) - k_i(1 - \varepsilon_{ii})}{\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj}}. \quad (2.7.40)$$

Если выполнить попарное умножение уравнений (2.7.39), то нетрудно убедиться, что в правой части окажутся только слагаемые, пропорциональные величинам второго порядка малости, т. е. произведениям  $\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj}$ . В левой части будут конечные величины  $k_i k_j$ , а также слагаемые, пропорциональные величинам  $\varepsilon_{ii}$ , которые взаимно сокращаются, и слагаемые, пропорциональные  $\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj}$ . Оставляя только конечные величины, получим три соотношения

$$k_i k_j - k_i^2 - k_j k_k + k_i k_k = 0, \quad (2.7.41)$$

попарное сложение которых дает

$$(k_i - k_j)^2 = 0. \quad (2.7.42)$$

Таким образом, с точностью до малых второго порядка  $\varepsilon_{jj} \varepsilon_{jj}$  можно полагать, что  $k_i = k_j = \bar{k}$  и поэтому из (2.7.40) находим

$$\frac{G_{\text{э}}}{G} = k \Rightarrow G_{\text{э}} = \bar{k} G \approx k_0 G. \quad (2.7.43)$$

где  $k_0 = \Delta V_0 / \Delta \bar{V}_0$  - сплошность среды в начальном состоянии.

Запишем теперь очевидное соотношение с учетом (2.7.43)

$$\frac{E_{\text{э}}}{E} = \frac{G_{\text{э}}(1 + \nu_{\text{э}})}{G(1 + \nu)} = \frac{k_0(1 + \nu_{\text{э}})}{1 + \nu}, \quad (2.7.44)$$

где  $E_{\text{э}}$  - эффективный модуль упругости Юнга;  $\nu_{\text{э}}$  - эффективный коэффициент Пуассона.

Взаимосвязь между эффективным  $E_{\text{э}}$  и действительным  $E$  модулями пористой среды не может быть аналогичной (2.7.43), поскольку согласно (2.7.44) в таком случае  $\nu_{\text{э}} = \nu$ . Эта взаимосвязь, по-видимому, как и (2.7.43), должна содержать  $k_0$ , но не может быть линейной относительно  $k_0$ . Кроме того, она должна быть такой, чтобы при изменениях  $\nu$  в теоретически допустимых пределах  $-1 \leq \nu \leq 0,5$  [1], эффективный коэффициент Пуассона  $\nu_{\text{э}}$  тоже не выходил за эти пределы. И, наконец, для несжимаемого каркаса, когда  $\nu = 0,5$ , очевидно  $\nu_{\text{э}} < 0,5$  при любых значениях  $k_0 < 1$ .

Перечисленным выше требованиям удовлетворяет зависимость, которую в наиболее общем виде можно записать так:

$$\frac{E_{\text{э}}}{E} = k_0^2 + c_1 k_0^3 + c_2 k_0^4 + \dots + c_n k_0^{n+2}, \quad c_1 + c_2 + \dots + c_n = 0, \quad (2.7.45)$$

где  $c_i$  -коэффициенты, зависящие от особенностей структуры упругой пористой среды.

Подставляя (2.7.45) в (2.7.44), имеем

$$\nu_{\text{э}} = (1 + \nu)(k_0 + c_1 k_0^2 + \dots + c_n k_0^{n+2}) - 1. \quad (2.7.46)$$

В первом приближении можно также принять  $c_i \approx 0$  и поэтому

$$\nu_{\text{э}} = (1 + \nu)k_0 - 1, \quad (2.7.47)$$

поскольку такая зависимость, хотя и не учитывает особенности структуры, но, как и (2.7.46), полностью удовлетворяет перечисленным выше требованиям. И действительно, если  $\nu = -1$ , то  $\nu_s = -1$ . Если  $\nu = 0,5$ , то в зависимости от значения  $k_0$ , получим  $\nu_s \leq 0,5$ . Если же  $k_0 = 1$ , то  $\nu_s = \nu$ .

Из (2.7.47) вытекает, что при некоторых положительных значениях  $\nu$  и  $k_0$  эффективный коэффициент Пуассона пористой среды становится отрицательным. Так, например, для  $\nu = 0,5$  этот факт имеет место, если  $k_0 < 2/3$ , что не противоречит теории [1, стр. 256], но, разумеется, требует экспериментальной проверки.

С учетом (2.7.47) запишем также выражения и для эффективных параметров: объемного модуля упругости  $E_{os}$  и постоянной Ляме  $\lambda_s$ ,

$$E_{os} = \frac{E_s}{1 - 2\nu_s} = \frac{2Gk_0^2(1 + \nu)}{3 - 2k_0(1 + \nu)}, \quad \lambda_s = \frac{2\nu_s G_s}{1 - 2\nu_s} = \frac{2G[(1 + \nu)k_0 - 1]k_0}{3 - 2k_0(1 + \nu)}. \quad (2.7.48)$$

Рассмотренные выше рассуждения и полученные на их основе зависимости по аналогии с упругими средами [17] можно распространить и на ньютоновские жидкости. Для этого достаточно произвести лишь формальную замену символов  $u$  на  $\dot{u}$  в соответствующих соотношениях. После такой замены получим

$$\mu_s = k\mu, \quad \nu_s = (1 + \nu)(k + c_1 k^2 + \dots + c_n k^{n+1}) - 1 \approx (1 + \nu)k - 1,$$

$$\mu_{os} = \frac{2\mu k^2(1 + \nu)}{3 - 2k(1 + \nu)}, \quad (2.7.49)$$

где  $\mu$ ,  $\mu_s$  - динамическая вязкость жидкости (действительная и эффективная);  $\mu_{os}$  - объемная вязкость (эффективная).

Если вещество пористой среды представляет собой вязкую несжимаемую жидкость, для которой  $\nu = 0,5$ , то в этом случае

$$\nu_s = 1,5(k + c_1 k^2 + \dots + c_n k^{n+1}) - 1 \approx 1,5k - 1, \quad \mu_{os} = \frac{\mu k^2}{1 - k}. \quad (2.7.50)$$

Таким образом, основным фактором, от которого зависят эффективные макроскопические параметры пористой среды, является величина ее сплошности  $k_0$  и, возможно, особенности структуры.

Оценку влияния последних можно получить как путем эксперимента, так и теоретически, для чего необходимо более подробно сформулировать определение структурных аналогов континуальных характеристик макродеформаций  $\varepsilon_{ii}$ .

Следует заметить, что рассмотренные выше основные зависимости для эффективных параметров были получены автором с использованием и другого подхода, принципиально отличающегося от изложенного.

Эффективные параметры пористой среды были также получены и авторами [28, стр. 203]. Предложенные в [28] выражения для  $E_\circ$  и  $\nu_\circ$  имеют вид:

$$E_\circ = E \frac{k^2}{1 + n(1 - k)}, \quad \nu_\circ = \frac{\nu + m(1 - k)}{1 + n(1 - k)},$$

$$n = \frac{(5\nu - 1)(1 - 3\nu)}{2(7 - 5\nu)}, \quad m = \frac{(1 - 5\nu)(3 - \nu)}{2(7 - 5\nu)}.$$

Анализируя эти выражения нетрудно убедиться, что в случае, когда  $\nu = 1/5$ , получим совершенно неприемлемый результат. И действительно, после подстановки  $\nu = 1/5$  в две последние формулы находим, что  $n = m = 0$ . Тогда из второй формулы вытекает, что  $\nu_\circ = \nu$ , т.е. коэффициент Пуассона не зависит от пористости  $\bar{p} = 1 - k$  при всех возможных ее значениях. Такое парадоксальное следствие, несомненно, противоречит здравому смыслу.

#### 2.7.4. Краткие выводы

Рассмотренный в п. 2.5 метод построения определяющих соотношений (2.5.14) обладает достаточно большой общностью и, наряду с одномерными системами, может быть распространен и на пространственные объекты. Это позволяет получить определяющие соотношения для тела в целом, описывающие взаимосвязь между некоторыми характерными размерами тела, координатами приложения и интенсивностью внешних сил. Из этих соотношений, как частный случай, могут быть выведены одномерные аналоги (2.5.14).

Определяющие соотношения для тела в целом в свою очередь позволяют определять упругие контакты на образцах произвольной

формы при наличии достоверной информации об интенсивности поверхностного нагружения.

Упомянутым выше не ограничивается применение определяющих соотношений для тела в целом. С их помощью можно достаточно просто получить выражения для эффективных параметров, например, пористой среды.

### **2.7.5. Контрольные вопросы**

1. Расскажите о подходе к выводу формулы для средних по объему тела напряжений.
2. Запишите общую формулу, с помощью которой можно получить выражения для средних деформаций.
3. Запишите выражения для средних по объему продольных деформаций.
4. Запишите взаимосвязь между средней объемной и продольными деформациями.
5. Запишите обобщенный закон упругости в осредненном виде.
6. Назовите основные характерные размеры тела, которые используются при записи выражений для средних деформаций.
7. Расскажите, каким путем можно перейти от определяющих соотношений для микрообъема упругой среды к определяющим соотношениям для тела в целом.
8. Сделайте корректный переход от общих формул для тела в целом к общеизвестной формуле применительно к одностороннему растяжению стержня.

### **Список использованной литературы**

1. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. Учебное пособие для университетов.– М.: Наука, 1979.– 744 с.
2. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. Пер. с англ.– М.: Машиностроение, 1985.– 472 с.
3. Василенко Н.В. Теория колебаний. Учебное пособие для втузов.– К.: Вища школа, 1992.– 430 с.
4. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. Учебное пособие для университетов.– М.: Наука, 1972.– 688 с.

5. Козачок А.А. Парадоксы классических решений волнового уравнения. Вестник НТУУ «КПИ», «Машиностроение», 2000.– Вып. 38, т. 2.– с. 124-133.
6. Козачок А. А. Парадоксы механики сплошных сред. Часть 1. Вопросы нелинейной динамики сплошных сред.– К.: Політехніка, 2003.– 89 с.
7. Араманович Н. Т., Левин В. И. Уравнения математической физики. Учебное пособие для вузов.– М.: Наука, 1969.– 288 с.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Учебное пособие для университетов.– М.: Наука, 1972.– 736 с.
9. Шебалин О.Д. Физические основы механики и акустики. Учебное пособие для физико-математических факультетов педагогических институтов.– М.: Высшая школа, 1981.– 261 с.
10. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Пер. с англ.– М.: Наука, 1966.– 228 с.
11. Козачок А.А. Новые уравнения динамики машин // The 4-th IFTOMM Intern. Symp. Theory and Practice of Mech.– Bucharest, Romania.– 1985.–vol. I-1.– P. 201–208.
12. Кухта К.Я., Кравченко В.П. Динамика непрерывно-дискретных систем.– К.: Наукова думка, 1978.– 131 с.
13. Исследование сложных непрерывно-дискретных систем / Кухта К.Я., Бойко А.Г., Гармаш Н.З. и др.– К.: Наукова думка, 1981.– 272 с.
14. Кожевников С.Н. Динамика нестационарных процессов в машинах.– К.: Наукова думка, 1986.– 288 с.
15. Єременко О.І. Розробка методів розрахунку машин з континуально-дискретними стержневими і замкнутими системами. Автореф. дис. канд. техн. наук: 05. 02. 09. НТУУ «КПІ».– К, 1997.– 17 с.
16. Маслов Г.С. Расчеты колебаний валов. Справочник.– М.: Машиностроение, 1967.– 431 с.
17. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. Учебник для вузов.– М.: Высшая школа, 1968.– 512 с.
18. Давыдов Б.Л., Скородумов Б.А. Статика и динамика машин.– М.: Машиностроение, 1967.– 431 с.
19. Бессонов А.П. Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев.– М.: Наука, 1967.– 279 с.
20. Савин Г.Н., Горошко О.А. Динамика нити переменной длины.– К.: Изд-во АН УССР, 1962.– 332 с.
21. Савин Г.Н. Об основных уравнениях шахтного подъема каната (подъема груза) // Прикладная механика.– 1955.– 1, вып. 1.– С. 5–22.
22. Ишлинский А.Ю. Об одном интегро-дифференциальном соотношении в теории упругой нити (каната) переменной длины // Укр. мат. журн.– 1953.– № 4.– С. 370–374.
23. Савин Г.Н., Путята Т.В., Фрадлин Б.Н. Курс теоретической механики. Учебник.– К.: Вища школа, 1973.– 360 с.
24. Козачок А.А. Основные уравнения динамики машин с переменной структурой // Landtechnik: Wissenschaftliche Zeitschrift der Wilhelm-Pieck-Universität.– Rostock.– 1987.– N-Reihe 36.7.– S. 68–72.
25. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных сред.– М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976.– 368 с.

26. Шермергор Т.Д. Теория упругости микroneоднородных сред.– М.: Наука, 1977.– 400 с.
27. Сендецкий Дж. Механика композиционных материалов, т. 2. Пер. с англ.– М.: Мир, 1978.– 368 с.
28. Механика композитов (в 12 т) / К.: Наукова думка, 1993.–т. 3: Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Шикула Е.Н., Назаренко Л.В. Статистическая механика и эффективные свойства материалов.– 380 с.
29. Козачок А.А. Новые подходы к постановке задач для волнового уравнения // Вісник Сумського державного університету. Сер. Технічні науки.– 2003.– № 12 (58).– С. 174–178.

*Сколько бы ни было точно математическое решение, оно не может быть точнее тех приближенных предпосылок, на коих оно основано.*

***А. Н. Крылов***

## **Послесловие**

Слова акад. Крылова А. Н., как и высказывания Эйлера, Фейнмана, а также Томаса Хаксли о математических жерновах, приведенные в качестве эпиграфов, красноречиво проливают свет на возможное происхождение вскрытых автором парадоксальных особенностей уравнений движения и многих точных решений классических задач, вошедших в учебники математической физики, теории упругости, теории колебаний и др. Перечень таких особенностей в подытоженном виде и указанных в очередности, согласно их значимости, выглядит так:

- уравнения Ламе, в противоположность общепринятому мнению, становятся существенно некорректными (область применимости сужается до чисел Маха  $M \ll 1$ ) или даже ошибочными (когда  $\partial^2 u(x, t) / \partial t^2 \approx 0$ ), если в качестве выражения для ускорения в них взять его точную запись в переменных Лагранжа, т. е.  $\partial^2 u(x_0, t) / \partial t^2$ ; даже традиционное уравнение колебаний струны имеет гораздо меньшую область применения, чем принято считать;
- уравнения Ламе, согласно достаточно распространенному, вошедшему в учебные пособия, мнению, почему-то не позволяют получать решения при резонансе, аналогичные тем, которые хорошо исследованы для дискретных систем;
- нарушение классического принципа суперпозиции для точных решений многих задач и физическая бессмысленность вытекающих из них следствий, которая проявляется в большей степени при большем количестве удерживаемых для расчета членов бесконечного ряда.

К сожалению, обнаруженные парадоксы – не просто любопытные факты, которые уже получили объяснение во второй части пособия. Находящиеся фактически на поверхности, но почему-то не замеченные нашими предшественниками, они позволили занять место в учебниках сомнительным научным положениям фундаментального характера,

усвоенным не одним поколением инженеров и научных работников. Поэтому ломка представлений, проникших в сознание в процессе инженерно-технического и особенно университетского образования, требует кропотливого труда и времени. С молодежью, свободной от бремени устоявшихся сомнительных представлений, дело обстоит проще. Несоизмеримо сложнее, согласно знаменитому высказыванию К. Трусделла, суметь «не потакать пресловутому нежеланию старцев учиться ничему новому» [3, стр. 11] особенно, когда приходится иметь дело с известными авторитетами, занимающими высокое положение в научном мире.

Автору в этом смысле пока заметно везло, поскольку большинство авторитетных ученых, с которыми пришлось дискутировать, не соответствовали пресловутой категории, упомянутой в изречении К. Трусделла. И, вероятно, только поэтому на убеждения пришлось потратить лишь три года, а не всю жизнь, как это часто бывало в истории науки. Определенное сопротивление, особенно после объяснения причины (а точнее, физических недоразумений), с которым пришлось все же встретиться в процессе признания изложенных в пособии результатов, автор считает вполне естественным. Не так легко некоторым оппонентам, очевидно, признать, что научные положения, находящиеся в основе их собственных работ и считавшиеся непоколебимыми, требуют пересмотра, как недостаточно корректные или даже ошибочные. И тем не менее, выигрыш от такого признания существенно больше возможных моральных потерь, связанных с девальвацией части наследия линейной теории. Новые научные направления, которые открываются в области совершенно не исследованных нелинейных аспектов механики деформируемого твердого тела, лишней раз опровергают утверждения скептиков об отсутствии фундаментальных проблем в этой области знаний. Источником таких проблем являются и обнаруженные парадоксы точных решений, и дополнительные ограничения, которых требуют линейные уравнения, и поиски новых методов решения нелинейных задач. И вот, если обсуждения физических и математических недоразумений, связанных с точными решениями классических задач, в публикациях, как представляется автору, не встречаются, то замечания по поводу ограниченности малыми числами Маха линеаризованных уравнений движения

известны и в гидродинамике [28, 29 ч.1; 29 ч.2], и в акустике [27, стр. 11, 16]. И только уверенность многих поколений профессионалов, что эти ограничения, вероятно, присущи только гидродинамике при конечных деформациях, в итоге и привела к тому, что возможные случаи, когда линейная теория справедлива, были экстраполированы и узаконены, как всеобщее правило. К тому же возможность точной записи ускорения без нелинейных членов для произвольных чисел Маха, но в лагранжевых переменных, не оставляла никаких сомнений относительно непоколебимости этого правила, позволяющего обеспечить элегантную, а на самом деле кажущуюся, простоту общим уравнениям классической теории упругости по сравнению с уравнениями гидродинамики. И то, что упомянутая простота все же связана с некорректной записью этих уравнений, было показано в публикациях [28, 29 см. ч.1] и более аргументировано, как хотел бы надеяться автор, в предлагаемом читателю учебном пособии.

