УДК 532.516/539.3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НЕДОРАЗУМЕНИЯ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ЗАМКНУТЫХ КЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ (УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА)

На сайте http://a-kozachok1.narod.ru

Козачок А.А., *Киев, Украина*

(Доклад на XI Международной конференции им. акад. Кравчука 18-20 мая 2006 г. и на XI Международной конференции «Гидроаэромеханика в инженерной практике» 22-26 мая 2006 г., Киев, Украина)

1. Реферат

При выводе классических уравнений теории упругости и гидромеханики используются одни и те же уравнения движения в напряжениях. При этом определяющие соотношения представляют собой линейные зависимости между девиаторами напряжений и деформаций или скоростей деформаций. Эти аналогии общеизвестны. Однако, окончательные уравнения гидромеханики и в учебных курсах (Лойцянский Л.Г. и др.), и в научной практике (Шлихтинг Г., Мизес Р. и др.) существенно отличаются от уравнений теории упругости. Система уравнений движения классической теории упругости не содержит давление. Даже в случае игнорирования уравнения неразрывности эта система рассматривается как замкнутая. Для вязкой сжимаемой жидкости почему-то используется еще и дополнительное замыкающее соотношение между плотностью ρ и давлением p. Причем p входит в уравнения явно. На самом же деле, если воспользоваться упомянутыми аналогиями или строгими математическими доказательствами, то давление, как и в теории упругости, можно исключить. В таком случае появляется скрытый в выражении для давления второй коэффициент и исчезает известная проблема «второй вязкости». К тому же уравнения идеально вязкой сжимаемой жидкости по форме совпадают с уравнениями теории упругости (левые части). Они могут быть приведены к виду:

$$\rho\vec{F} + (\mu_o + \frac{\mu}{3})\,\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\dot{\vec{u}}) + \mu\nabla^2\dot{\vec{u}} = \rho\ddot{\vec{u}}, \qquad (1)$$

где $\mu_o = 2\mu(1+\nu)/3(1-2\nu)$ -объемная вязкость; μ-вязкость; ν -коэффициент Пуассона; $\dot{\vec{u}} = d\vec{u}/dt$, $\ddot{\vec{u}} = d^2\vec{u}/dt^2 = d\dot{\vec{u}}/dt$ - векторы скорости и ускорения соответственно; ∇^2 -оператор Лапласа.

Совместно с уравнением неразрывности уравнения (1) образуют замкнутую систему.

Для слабосжимаемой жидкости, очевидно, следует принять $\rho \approx \rho_0 = \mathrm{const}$. Тогда уравнение неразрывности, как и для твердого тела, может быть игнорировано. После решения такой системы можно выполнить предельный переход $\mu_o \to \infty$, а следовательно и $\mathrm{div}\dot{\vec{u}} = 0$. Это позволит получить результат для абсолютно несжимаемой жидкости. Разумеется, решение системы из трех однотипных уравнений движения значительно проще решения системы четырех традиционных уравнений разного типа.

Таким образом, определяющее соотношение между плотностью и давлением для идеально вязкой сжимаемой жидкости вводить нельзя. Оно является избыточным. Его можно вводить лишь для упруго сжимаемой жидкости. Однако в этом случае общее

давление p следует разделить на упругую $\tilde{p}$ и вязкую $\bar{p}$ составляющие. Это означает переход к вязко-упругой модели Фойхта с упругими касательными напряжениями равными нулю. Следует принять во внимание, что скорость звука $a = \sqrt{\partial \tilde{p} / \partial \rho}$. Тогда уравнения динамики упруго сжимаемой вязкой жидкости приобретут окончательный вид

$$\rho \vec{F} - a^2 \operatorname{grad}(\rho - \rho_0) + (\mu_o + \frac{\mu}{3}) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \dot{\vec{u}}) + \mu \nabla^2 \dot{\vec{u}} = \rho \ddot{\vec{u}} . \qquad (2)$$

Вместе с уравнением неразрывности уравнения (2) создают замкнутую систему. При экспериментальном определении объемной вязкости μ_o в (2) из общего давления p следует вычесть упругую составляющую $\tilde{p}$. Поэтому

$$\mu_o = \frac{a^2(\rho - \rho_0) - p}{\dot{\varepsilon}_o} ,$$

где $\dot{\varepsilon}_o = \operatorname{div} \dot{\vec{u}}$ -скорость объемной деформации для модели Фойхта.

2.Общие сведения

Классические уравнения динамики сжимаемой жидкости (уравнения Навье-Стокса) в авторитетной учебной [1, стр. 174; 2, стр. 156] и научной [3, стр. 44 и др.] литературе обычно записываются в компактной, но недостаточно прозрачной для анализа, векторной форме

$$\rho \vec{F} - \operatorname{grad} \tilde{p} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \dot{\vec{u}}) + \mu \nabla^2 \dot{\vec{u}} = \rho \ddot{\vec{u}}, \qquad (1)$$

где $\vec{F}$ - вектор единичной массовой силы, который иногда [3 и др.] опускают; $\tilde{p}$-давление, математическую интерпретацию которого при записи (1) часто [1, 3 и др.] не раскрывают; $\dot{\vec{u}} = d\vec{u}/dt$ - вектор скорости; $\ddot{\vec{u}} = d^2\vec{u}/dt^2 = d\dot{\vec{u}}/dt$ - вектор ускорения подвижной материальной частицы (индивидуальная или субстанциональная, или полная производная скорости по времени [1, стр. 36]); ρ - плотность; ∇^2 - оператор Лапласа; μ - вязкость (в терминологии других авторов- коэффициент вязкости); λ - коэффициент или в терминологии [3, стр. 45] второй коэффициент вязкости.

Чтобы в дальнейшем исключить путаницу в терминологии, заметим, что λ в [2, стр. 153] имеет название (как и μ) коэффициент вязкости. Автор [4, стр. 384] называет его просто коэффициентом λ. Однако в [1, стр. 172, 255; 5, стр. 72] вторым коэффициентом вязкости именуется не λ, а сумма $\lambda + \frac{2}{3}\mu$, а в [2, стр.154] и в [3, стр. 45] величина $\lambda + \frac{2}{3}\mu$ названа коэффициентом объемной вязкости . В [5, стр. 73] при третьем члене вместо $\lambda + \mu$ записан коэффициент $\zeta + \frac{\mu}{3}$ (т.е. $\zeta = \lambda + \frac{2}{3}\mu$). Мы же пока воздержимся от определений и назовем λ, как и автор [4], просто коэффициентом, поскольку физический смысл λ требует выяснения.

Некоторые авторы, например, [4, стр. 387] и [6, стр. 66], наряду с подробным выводом записывают уравнения динамики сжимаемой жидкости в доступной для анализа скалярной форме.

Преследуя цели критического анализа при выводе уравнений динамики сжимаемой жидкости, мы тоже запишем их в скалярной форме, следуя [4], но с использованием других обозначений. К тому же вместо кинематической вязкости $\overline{\nu}$, как и в [1], выполним замену $\overline{\nu} = \mu/\rho$. В таком случае уравнения, по сути заимствованные из [4], примут вид

$$\begin{aligned}
&\rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{div}\dot{\vec{u}} + \mu\nabla^2\dot{u}_x = \rho\ddot{u}_x,\\
&\rho F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{div}\dot{\vec{u}} + \mu\nabla^2\dot{u}_y = \rho\ddot{u}_y,\\
&\rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{div}\dot{\vec{u}} + \mu\nabla^2\dot{u}_z = \rho\ddot{u}_z.
\end{aligned} \tag{1,a}$$

Нетрудно заметить, что для перехода от уравнений (1) к развернутой форме (1, а) следует обозначить $p = \tilde{p}$ и принять $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$. Эта весьма существенная особенность связана с тем, что при выводе (1) принято во внимание соотношение [4, стр. 383; 5, стр. 71], которое фактически подразумевает наличие двух составляющих давления, т. е. $\tilde{p}$ и $\overline{p} = -\frac{1}{3}\lambda\,\mathrm{div}\dot{\vec{u}}$, поскольку

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = -3\tilde{p} + \overline{\lambda}\,\mathrm{div}\dot{\vec{u}}, \quad \overline{\lambda} = 3\lambda + 2\mu\ . \tag{2}$$

О том, что в уравнениях (1) величину $\tilde{p}$ следует подразумевать как составляющую полного давления p, ни один из цитированных авторов почему-то не упоминает за исключением [5, стр. 72], где речь идет лишь о необходимости уточнения физического смысла $\tilde{p}$.

При выводе (1,а) авторами [4] тоже сначала используется (2), но затем принимается $\overline{\lambda} = 0$, и в результате вторая составляющая давления $\overline{p}$ молчаливо опускается, а соотношение между компонентами нормальных напряжений и давлением в целом принимает обычный вид [4, стр. 384]

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = -3\tilde{p} = -3p. \tag{2,a}$$

По этому поводу автор [3, стр. 45] отмечает, что «довольно часто, рассматривая быстроразвивающиеся процессы, коэффициент объемной вязкости принимают равным нулю, т.е. принимают следующее условие:

$\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0$». Из цитированного замечания, а также из дальнейших рассуждений в [3, стр. 45-51], по-видимому, следует, что даже при условии (2,а), вытекающем из (2) при таком допущении, система (1,а) остается незамкнутой, а второй коэффициент вязкости, как и в [4], становится отрицательным и выражается через первый, т.е. $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$. Поэтому для замыкания системы и (1), и (1,а) используется уравнение неразрывности [4, стр. 387]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \dot{\vec{u}}) = 0, \tag{3}$$

а также, по аналогии с идеальной жидкостью, некоторое (обычно линейное) соотношение между давлением и плотностью [3, стр. 45]

$$\tilde{p} = \varphi(\rho), \quad p = \overline{\varphi}(\rho). \tag{4}$$

Иным способом, но, полагая справедливым [2,а], излагает вывод уравнений Навье-Стокса и автор [6, стр. 65-67]. Записывая их окончательный вид в более развернутой по сравнению с (1,а) форме, автор [6] тоже полагает, что замыкающее соотношение может быть представлено по аналогии с (4). В такой же развернутой форме записаны уравнения Навье-Стокса и в [7, стр. 803]. При записи этих уравнений автор [7] использует соотношение (2), полагая $\overline{\lambda} = 0$, $\tilde{p} = p$, т. е. фактически приходит к (2,а). Величину $\frac{\overline{\lambda}}{3}$ автор [7] называет коэффициентом второй или объемной вязкости. В качестве замыкающего соотношения, как и в [6], принимается линейная зависимость типа (4).

Обратим особое внимание на то, что формулирование определяющих соотношений между динамическими и кинематическими параметрами деформируемой среды может быть корректным, если и те, и другие являются компонентами тензоров. В классическом случае – это симметричные тензоры второго ранга [8, стр. 38-50, 108-110], первые инварианты которых представляют собой сумму трех компонент, расположенных по главной диагонали. Поэтому определяющие соотношения для нормальных напряжений вязкой сжимаемой жидкости, как и в теории упругости [6, стр. 64-65; 8, стр. 144], записывают в виде линейной зависимости между компонентами девиаторов напряжений и скоростей деформаций

$$\sigma_{ii} - \sigma_{\text{ср}} = 2\mu(\dot{\varepsilon}_{ii} - \dot{\varepsilon}_{\text{ср}}), \; \sigma_{\text{ср}} = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}), \; \dot{\varepsilon}_{\text{ср}} = \frac{1}{3}(\dot{\varepsilon}_{xx} + \dot{\varepsilon}_{yy} + \dot{\varepsilon}_{zz}). \tag{5}$$

Соотношения (5) означают, и это мы, несмотря на повторение общеизвестной истины, еще раз подчеркиваем, что суммы нормальных компонент этих тензоров не зависят от ориентации системы координат [4, стр. 378; 9, стр. 37]. Следовательно, давление $p=-\sigma_{\text{ср}}$ в уравнениях движения (1,а) мы можем выразить через компоненты нормальных напряжений согласно (2,а). При выполнении такой же замены в (5) получим неоднородную алгебраическую систему из трех уравнений с тремя неизвестными $\sigma_{xx},\sigma_{yy},\sigma_{zz}$. После решения этой системы мы, вероятно, должны получить определяющие соотношения и для σ_{ii}, и для $\sigma_{\text{ср}}$, т.е. функциональные зависимости $\sigma_{ii}(\dot{\varepsilon}_{ii})$. Однако сложение трех первых уравнений системы (5) приводит к тождеству $0\equiv 0$. Попытка же решить систему с использованием правила Крамера [10, стр. 15] тоже оказывается неудачной, поскольку все корни получаются в виде неопределенностей типа $0/0$. Возможно, поэтому (предположение автора) и сформировалась передающаяся по наследству точка зрения, что для замыкания системы (1,а), кроме уравнения неразрывности, требуется дополнительное соотношение [6, стр.67; 7, стр. 804, 811; 9, стр. 45-46 и др.]. Это соотношение обычно формулируется в виде (4). Мы же попытаемся доказать, что уравнения Навье-Стокса для идеально вязкой сжимаемой жидкости, т.е. (1,а), совместно с уравнением неразрывности могут быть преобразованы в замкнутую систему без привлечения дополнительного соотношения. Поэтому использование помимо (2,а) дополнительного замыкающего соотношения (4) с целью замыкания (1,а) представляет собой недопустимую процедуру навязывания этой системе избыточного условия. Будучи навязанным на стадии вывода системы, которую пока никому не удалось решить, это избыточное условие в виде обычной подмены выражения для p вкоренилось в линеаризованные уравнения, создавая обманчивую видимость «достаточной строгости» [3, стр. 47]. Изложение основ динамики вязкого газа в университетских учебных курсах, например [7, стр. 801-892], тоже базируется на использовании упомянутого избыточного условия. К каким последствиям привела такая процедура при решении многочисленных прикладных задач, требует специального изучения.

3. Элементарные соображения по поводу замыкания уравнений Навье-Стокса идеально вязкой жидкости без дополнительных условий

Запишем определяющие соотношения с развернутыми левыми частями (5) для случая двумерного нагружения вязкой среды $(\sigma_{zz}=0)$

$$\sigma_{xx}-\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{3}=2\mu(\dot{\varepsilon}_{xx}-\dot{\varepsilon}_{\text{ср}}),$$

$$\sigma_{yy}-\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{3}=2\mu(\dot{\varepsilon}_{yy}-\dot{\varepsilon}_{\text{ср}}), \tag{6}$$

$$-\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{3}=2\mu(\dot{\varepsilon}_{zz}-\dot{\varepsilon}_{\text{ср}}).$$

Поскольку при двумерном нагружении давление

$$p=-\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{3},$$

то из третьего соотношения (6) отчетливо видно, что величина p может быть только функцией переменных $\dot{\varepsilon}_{xx},\dot{\varepsilon}_{yy},\dot{\varepsilon}_{zz}$, т.е. $p=f(\dot{\varepsilon}_{ii})$. Поэтому никакого другого определяющего соотношения не требуется. Чтобы определить общий вид этой функции, сначала запишем определяющие соотношения (5) в развернутом виде для случая одномерного нагружения вязкой среды $(\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=0)$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}-\frac{\sigma_{xx}}{3}&=2\mu(\varepsilon_{xx}-\frac{\dot{\varepsilon}_{xx}+\dot{\varepsilon}_{yy}+\dot{\varepsilon}_{zz}}{3})\Rightarrow \frac{2\sigma_{xx}}{3}=2\mu(\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{xx}-\frac{\dot{\varepsilon}_{yy}+\dot{\varepsilon}_{zz}}{3}),\\
-\frac{\sigma_{xx}}{3}&=2\mu(\varepsilon_{yy}-\frac{\dot{\varepsilon}_{xx}+\dot{\varepsilon}_{yy}+\dot{\varepsilon}_{zz}}{3})\Rightarrow -\frac{\sigma_{xx}}{3}=2\mu(\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{yy}-\frac{\dot{\varepsilon}_{xx}+\dot{\varepsilon}_{zz}}{3}),\\
-\frac{\sigma_{xx}}{3}&=2\mu(\varepsilon_{zz}-\frac{\dot{\varepsilon}_{xx}+\dot{\varepsilon}_{yy}+\dot{\varepsilon}_{zz}}{3})\Rightarrow -\frac{\sigma_{xx}}{3}=2\mu(\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{zz}-\frac{\dot{\varepsilon}_{xx}+\dot{\varepsilon}_{yy}}{3}).
\end{aligned}\tag{7}$$

Приравнивая правые части второго и третьего соотношений (7), находим, что

$$\dot{\varepsilon}_{yy}=\dot{\varepsilon}_{zz}.\tag{8}$$

В таком случае из второго соотношения первой строки (7) находим, что

$$\sigma_{xx}=2\mu(\dot{\varepsilon}_{xx}-\dot{\varepsilon}_{yy})=2\mu(\dot{\varepsilon}_{xx}-\dot{\varepsilon}_{zz}),\tag{9}$$

откуда следует,

$$\sigma_{xx}=2\mu\dot{\varepsilon}_{xx}(1-\frac{\dot{\varepsilon}_{yy}}{\dot{\varepsilon}_{xx}})=2\mu\dot{\varepsilon}_{xx}(1-\frac{\dot{\varepsilon}_{zz}}{\dot{\varepsilon}_{xx}}),\tag{10}$$

Введем обозначения для отношения

$$\nu=-\frac{\dot{\varepsilon}_{yy}}{\dot{\varepsilon}_{xx}}=-\frac{\dot{\varepsilon}_{zz}}{\dot{\varepsilon}_{xx}}\Rightarrow\dot{\varepsilon}_{xx}=-\frac{\dot{\varepsilon}_{yy}}{\nu}=-\frac{\dot{\varepsilon}_{zz}}{\nu}.$$

Используя это обозначение применительно к (10), можем записать три равноправных выражения для σ_{xx}

$$\sigma_{xx} = 2\mu(1+\nu)\dot{\varepsilon}_{xx}, \quad \sigma_{xx} = -2\mu(1+\nu)\frac{\dot{\varepsilon}_{yy}}{\nu}, \quad \sigma_{xx} = -2\mu(1+\nu)\frac{\dot{\varepsilon}_{zz}}{\nu}, \tag{11}$$

которые преобразуем следующим образом:

$$\sigma_{xx} = 2\mu(1+\nu)\dot{\varepsilon}_{xx}, \quad -\nu\sigma_{xx} = 2\mu(1+\nu)\dot{\varepsilon}_{yy}, \quad -\nu\sigma_{xx} = 2\mu(1+\nu)\dot{\varepsilon}_{zz}. \tag{11,a}$$

Если сложить все три соотношения (11,а), то получим

$$\sigma_{xx} = 3\sigma_{\text{ср}} = \frac{2\mu(1+\nu)}{1-2\nu}\dot{\varepsilon}_{\text{o}}, \quad \dot{\varepsilon}_{\text{o}} = \dot{\varepsilon}_{xx} + \dot{\varepsilon}_{yy} + \dot{\varepsilon}_{zz}. \tag{12}$$

Теперь запишем первое соотношение (11,а) и (12) в виде

$$\frac{\sigma_{xx}}{1+\nu} = 2\mu\dot{\varepsilon}_{xx}, \quad \frac{\nu\sigma_{xx}}{1+\nu} = 2\mu\frac{\nu}{1-2\nu}\dot{\varepsilon}_{\text{o}}. \tag{13}$$

Если сложить оба соотношения (13), то получим

$$\sigma_{xx} = 2\mu(\dot{\varepsilon}_{xx} + \frac{3\nu}{1-2\nu}\dot{\varepsilon}_{\text{ср}}). \tag{14}$$

Аналогичные соотношения мы, очевидно, можем записать, рассматривая одноосное нагружение для направлений y или z.

Для построения определяющих соотношений в случае трехмерного нагружения можно воспользоваться принципом суперпозиции. Однако мы этим заниматься не будем, поскольку такие соотношения фактически не отличаются от уже полученных, т. е. от (12) и (14)

$$-p = \sigma_{\text{ср}} = \frac{2\mu(1+\nu)}{1-2\nu}\dot{\varepsilon}_{\text{ср}}, \quad \sigma_{ii} = 2\mu(\dot{\varepsilon}_{ii} + \frac{3\nu}{1-2\nu}\dot{\varepsilon}_{\text{ср}}), \quad i = x, y, z. \tag{14,a}$$

Именно эти соотношения и представляют собой корни системы алгебраических уравнений (5), которые не удается найти традиционными методами. В том, что это действительно так, легко убедиться после подстановки (14,а) в (5).

Возможно, для построения соотношений (14,а) и не следовало бы приводить такие подробные выкладки, а сразу же воспользоваться методологией вывода классических уравнений теории упругости [8, стр. 103-109]. И действительно, нетрудно заметить, что (14,а) формально совпадают с аналогичными соотношениями теории упругости [8, стр. 104, 107] после замены компонент деформаций и модуля упругости соответствующими компонентами скоростей деформаций и вязкостью. Однако, несмотря на общеизвестную [6, стр. 65; 8, стр. 144] аналогию в записи определяющих соотношений теории упругости и гидродинамики, т.е. соотношений (5), остальные аналогии почему-то выпали из поля зрения наших предшественников. Поэтому на протяжении более полутораста лет основные уравнения динамики идеально вязкой сжимаемой жидкости рассматривались как незамкнутые. Для построения замыкающих соотношений на самом деле замкнутых, но окончательно не раскрытых, уравнений потрачено немало усилий известных ученых нескольких поколений. Об этом свидетельствуют многочисленные работы, например [3,5,6 и др.]. Это недоразумение, казалось бы, хорошо заметное на примере записи уравнений классической теории упругости и других, описанных в [3, стр. 49-52] аналогий, на долгие годы почему-то оставалось в тени. Произошло это, вероятно, потому, что подстановка определяющих соотношений в форме (5) в уравнения движения в напряжениях и в гидромеханике, и в теории упругости приводит к появлению давления в качестве дополнительной неизвестной, а также к кажущейся потере второго независимого коэффициента, по поводу существования которого высказывались различные точки зрения [4, стр. 385 (сноска)]. Возможно, именно поэтому для вывода определяющих соотношений классических уравнений теории упругости в [8, стр. 101-104] автор, вопреки первоначально принятой им же тензорной методологии, использует принцип суперпозиции нагружения, а не соотношение между девиаторами типа (5) . К соотношениям типа (5) он в конечном итоге все же приходит, но использует при этом результаты, аналогичные (14,а) и полученные именно на основе принципа суперпозиции [8, стр. 104].

4. Замкнутая система уравнений динамики идеально вязкой жидкости

С учетом изложенных в п. п. 2 и 3 дополнений уравнения (1,а) следует преобразовать, исключив, как и в теории упругости, давление p по формуле (14,а). В таком случае полученные уравнения

$$\rho\vec{F} + (\tilde{\lambda} + \mu)\,\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\dot{\vec{u}}) + \mu\nabla^2\dot{\vec{u}} = \rho\ddot{\vec{u}}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \qquad (15)$$

формально записываются так же, как и уравнения классической теории упругости после замены в левой части векторов перемещений $\vec{u}$ векторами скоростей $\dot{\vec{u}}$. Разумеется, эти уравнения необходимо дополнить уравнением неразрывности (3), которое в классической теории упругости из-за малости деформаций ($\varepsilon_{ii} << 1$) и, как следствие, из-за незначительного изменения плотности $\rho = \rho_0$, вполне обоснованно не используется.

Следует, однако, учесть и возможное возражение по поводу применения выражения для коэффициента $\tilde{\lambda}$, поскольку экспериментальное определение входящего в это выражение аналога коэффициента Пуассона ν в маловязких жидкостях затруднительно, а в ряде случаев возможно только косвенными методами. Поэтому в таких случаях, очевидно, следует воспользоваться выражением для объемной вязкости согласно первой формулы (14,а)

$$\sigma_{ср} = \frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}\dot{\varepsilon}_о \Rightarrow \mu_о = \frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)} = \frac{\mu_п}{3(1-2\nu)}\ , \tag{16}$$

где $\mu_п$ - продольная вязкость, характеризующая сопротивление идеально вязкой среды при одноосном растяжении (сжатии).

Из выражения для $\tilde{\lambda}$ в (15) вытекает, что $\tilde{\lambda}$ >0 только при условии $\nu > 0$.

В результате несложных преобразований из (16) получим

$$\nu = \frac{3\mu_о - 2\mu}{2(3\mu_о + \mu)}\ . \tag{17}$$

Таким образом, входящие в уравнения (15) коэффициенты теперь уже выражаются через поперечную μ и объемную $\mu_о$ вязкости. Они определяются известными экспериментальными методами. При этом выражение для коэффициента $\tilde{\lambda}$ принимает вид

$$\tilde{\lambda} = \mu_о - \frac{2}{3}\mu \Rightarrow \mu_о = \tilde{\lambda} + \frac{2}{3}\mu\ . \tag{15,а}$$

Из (15,а) следует, что не $\lambda + \frac{2}{3}\mu$ в уравнениях (1), а только сумму $\tilde{\lambda} + \frac{2}{3}\mu$ в (15,а) можно толковать как истинную объемную вязкость, поскольку для идеально вязкой жидкости условие $\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0$ соблюдается всегда, а коэффициент λ действительно принимает отрицательное значение, но превращается из независимого в зависимый. При этом следует иметь в виду, что объемная вязкость согласно (16) может быть равна нулю в двух случаях: при $\mu = 0$ или же при $\nu = -1$. Однако оба эти случая лишены физического смысла. В таких ситуациях при деформировании в среде не возникают нормальные напряжения, поскольку объемная $\mu_о$ и продольная $\mu_п$ вязкости согласно (16) равны нулю. В свою очередь отсутствие нормальных напряжений на всех произвольно ориентированных площадках означает и отсутствие касательных напряжений.

Если рассматривается течение слабосжимаемой жидкости, то, как и в классической теории упругости, можно принять $\rho = \text{const}$ и опустить уравнение неразрывности. Это позволит существенно упростить поиски решения, поскольку вместо четырех традиционных уравнений (движения и неразрывности) можно вполне корректно использовать только три, причем однотипные, уравнения движения

$$\rho\vec{F} + (\mu_o + \frac{\mu}{3})\,\mathrm{grad}(\mathrm{div}\dot{\vec{u}}) + \mu\nabla^2\dot{\vec{u}} = \rho\ddot{\vec{u}}\,. \qquad (15,б)$$

Если после решения (15,б) рассмотреть еще и случай, когда $\mu_o \to \infty$, $\mathrm{div}\dot{\vec{u}} \to 0$, то это позволит получить результат для абсолютно несжимаемой жидкости.

Нетрудно заметить, что переход от вязкой жидкости согласно (1,а) и, разумеется, согласно (15,б) к традиционной идеальной жидкости (невязкой и фактически упругой) невозможен. Поэтому навязывание системе (1,а) избыточного определяющего соотношения в виде (4), как это предлагают авторы [6, стр. 67, 8, стр. 801; 9,стр. 45-47 и др.], недопустимо.

5. Замкнутая система уравнений динамики вязкой упруго сжимаемой жидкости

Уравнения динамики идеально вязкой сжимаемой жидкости (15,б), а следовательно и (1,а), не учитывают упругие свойства при всестороннем сжатии реальных сред, например, газов. Поэтому для вывода уравнений движения, учитывающих и упругие свойства жидкости, можно воспользоваться подходом согласно [4, стр. 379; 5, стр. 71], который не был до конца реализован авторами [4,5], поскольку физический смысл коэффициента λ(ζ в[5]) так и остался невыясненным. Единственное, что удалось авторам [5, стр. 73],- это показать, что вторая вязкость ζ является положительной величиной, хотя по этому поводу существуют и другие авторитетные мнения [11 и др.].

Предположим, как и авторы [4,5], что компоненты нормальных напряжений упруго сжимаемой вязкой жидкости можно представить в виде суммы компонент двух тензоров: шарового и симметричного тензора второго ранга. Поэтому

$$\sigma_{ii} = -\tilde{p} + \overline{\sigma}_{ii}, \quad (i = 1,2,3 \text{ или } x, y, z), \qquad (18)$$

где $\tilde{p}$ – упругая составляющая; $\overline{\sigma}_{ii}$ - вязкая составляющая.

Предположим также, как и для модели Фойхта, что $\dot{\overline{\varepsilon}}_{ii} = \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ii} = \dot{\varepsilon}_{ii}$, и в дальнейшем на детальных выкладках попытаемся проследить корректность вывода уравнений (1) для упруго сжимаемой жидкости .

Заметим, что по общепринятому предположению упругая составляющая $\tilde{p}$ не зависит от направления и поэтому может рассматриваться, как некоторое гипотетическое всестороннее давление, которое при отсутствии вязкости соответствует давлению в идеальной жидкости. Если сложить все три уравнения (18), то получим

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = -3\tilde{p} + \overline{\sigma}_{xx} + \overline{\sigma}_{yy} + \overline{\sigma}_{zz} = -3(\tilde{p} + \overline{p}) = -3p = 3\sigma_{\text{ср}} \quad . \tag{19}$$

Теперь по аналогии с (5) запишем традиционные соотношения между компонентами девиаторов напряжений и скоростей деформаций для вязкой составляющей

$$\overline{\sigma}_{ii} - \overline{\sigma}_{\text{ср}} = 2\mu(\dot{\varepsilon}_{ii} - \dot{\varepsilon}_{\text{ср}}), \quad \overline{\sigma}_{cp} = -\overline{p} \ . \tag{20}$$

Затем воспользуемся результатами п. 3 и сразу же запишем определяющие соотношения для $\overline{\sigma}_{ii}$ и $\overline{\sigma}_{\text{ср}} = -\overline{p}$

$$\overline{\sigma}_{ii} = 2\mu(\dot{\varepsilon}_{ii} + \frac{3\nu}{1-2\nu}\dot{\varepsilon}_{\text{ср}}), \quad -\overline{p} = \overline{\sigma}_{\text{ср}} = \frac{2\mu(1+\nu)}{1-2\nu}\dot{\varepsilon}_{\text{ср}} \ . \tag{21}$$

С учетом (21) соотношения (18) и (19) принимают вид

$$\begin{aligned} &\sigma_{ii} = -\tilde{p} + 2\mu(\dot{\varepsilon}_{ii} + \frac{3\nu}{1-2\nu}\dot{\varepsilon}_{\text{ср}}), \\ &-p = \sigma_{\text{ср}} = -\tilde{p} + \frac{2\mu(1+\nu)}{1-2\nu}\dot{\varepsilon}_{\text{ср}} = -\tilde{p} + \overline{\mu}_{\text{о}}\dot{\varepsilon}_{\text{о}}, \\ &\overline{\mu}_{\text{о}} = \frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \ , \end{aligned} \tag{22}$$

где $\overline{\mu}_{\text{о}}$ - аналог объемной вязкости согласно (16).

Определяющие соотношения для касательных напряжений, как и в [4, стр. 384], очевидно, следует принять в виде

$$\overline{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} = \mu\dot{\varepsilon}_{ij}, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = 0 . \tag{23}$$

Предположение $\tilde{\sigma}_{ij} = 0$ при наличии сдвиговых деформаций противоречит традиционной упругой модели, поскольку в таком случае модуль сдвига равен нулю. Но для традиционной модели равенство нулю модуля сдвига в свою очередь означает, что и нормальные напряжения тоже равны нулю. В таком случае условие, что упругое давление не равно нулю, противоречит общепринятым соотношениям между компонентами тензора напряжений. Поэтому, игнорируя это противоречие, следует сделать оговорку, что используется какая-то нетрадиционная упругая модель, для которой всегда $\tilde{\sigma}_{ij} = 0$, либо рассматривается процесс при малых деформациях сдвига, когда понятие о течении теряет смысл. Можно предположить, например, что модуль сдвига близок к нулю, коэффициент Пуассона мало отличается от значения 0,5, а линейная теория справедлива при больших деформациях, имеющих место в потоке жидкости. В этом случае объемный модуль упругости может иметь любое значение. Однако и при таких предположениях потребуются ограничения на величины компонент деформаций сдвига, что для реальных течений жидкости или вязкого газа весьма проблематично. К тому же остается серьезная проблема и с независимостью $\tilde{p}$ (и как следствие компонент упругих напряжений) от направления. Видимо по этому поводу были сомнения и у авторов [5, стр. 72], поскольку они пришли к выводу о необходимости уточнения, «…что именно подразумевать под давлением $\tilde{p}$». Дальнейшие размышления привели авторов [5] к выводу, что под давлением $\tilde{p}$ «…следует понимать функцию $\tilde{p} = \tilde{p}(\varepsilon, \rho)$. При этом $\tilde{p}$ уже не будет, строго говоря, давлением в обычном смысле слова, т.е. не будет совпадать с нормальной силой, действующей на элемент поверхности» [5, стр. 275].

Используя выражение для объемной вязкости $\bar{\mu}_о$ в (22), коэффициент ν можно выразить через μ и $\bar{\mu}_о$ согласно (17), и тогда уравнения динамики упруго сжимаемой вязкой жидкости принимают вид

$$\rho\vec{F} - \operatorname{grad}\tilde{p} + (\bar{\mu}_о + \frac{\mu}{3})\operatorname{grad}(\operatorname{div}\dot{\vec{u}}) + \mu\nabla^2\dot{\vec{u}} = \rho\ddot{\vec{u}} . \qquad (24)$$

Если принять во внимание, что $\bar{\mu}_о \operatorname{grad}(\operatorname{div}\dot{\vec{u}}) = -\bar{p}$, то уравнение (24) можно записать в виде (1,а), имея в виду, что $p = \tilde{p} + \bar{p}$.

Уравнения формально совпадают с приведенными в [5, стр. 73] и отличаются от (1) доопределением выражения и физического смысла для коэффициента при третьем члене, т.е.

$$\lambda + \mu = \bar{\mu}_о + \frac{\mu}{3} \Rightarrow \lambda = \bar{\mu}_о - \frac{2}{3}\mu \Rightarrow \bar{\mu}_о = \lambda + \frac{2}{3}\mu . \qquad (25)$$

Однако, следует иметь в виду, что коэффициент $\bar{\mu}_о$ по сравнению с найденным ранее для идеально вязкой жидкости имеет несколько иной физический смысл, поскольку фактически используется усеченная вязко-упругая модель Фойхта, когда $\tilde{\sigma}_{ij} = 0$.

Для обычной идеально вязкой жидкости $\mu_о$ определяется как отношение

$$\mu_о = \frac{\sigma_{ср}}{\dot{\varepsilon}_о} = -\frac{p}{\dot{\varepsilon}_о} . \qquad (26)$$

Но при определении объемной вязкости для упруго сжимаемой жидкости из общего напряжения $\sigma_{ср}$ следует вычесть упругую составляющую. Поэтому

$$\bar{\mu}_о = \frac{\bar{\sigma}_{ср}}{\dot{\varepsilon}_о} = \frac{\sigma_{ср} + \tilde{p}}{\dot{\varepsilon}_о} = -\frac{p - \tilde{p}}{\dot{\varepsilon}_о} , \qquad (27)$$

поскольку $\sigma_{ср} = \bar{\sigma}_{ср} - \tilde{p}$, $\dot{\bar{\varepsilon}}_о = \dot{\tilde{\varepsilon}}_о = \dot{\varepsilon}_о$.

Как следует из (27), экспериментальное определение объемной вязкости упруго сжимаемой жидкости требует еще и вычисления давления за счет сил упругости $\tilde{p}$.

Выражение для $\tilde{p}$, игнорируя упомянутое выше противоречие, вероятно, можно записать так:

$$\tilde{p} = -E_{о}\varepsilon_{о} \Rightarrow \quad \overline{\mu}_{о} = \frac{\sigma_{ср} - E_{о}\varepsilon_{о}}{\dot{\varepsilon}_{о}} \ , \tag{28}$$

где $E_{о}$ - аналог объемного модуля упругости, но для какой-то нетрадиционной упругой модели, модуль сдвига которой равен нулю.

Экспериментальное определение модуля $E_{о}$ затруднено, поскольку

$$E_{о} = -\frac{\tilde{p}}{\varepsilon_{о}} = \frac{\tilde{\sigma}_{ср}}{\varepsilon_{о}} \ , \tag{29}$$

т.е. из общего напряжения $\sigma_{ср}$ следует исключить вязкую составляющую $\overline{\sigma}_{ср}$. Поэтому, принимая во внимание, что

$$\varepsilon_{о} = \frac{dV - dV_{0}}{dV}, \quad dV = \frac{dm}{\rho}, \quad dV_{0} = \frac{dm}{\rho_{0}}, \tag{30}$$

запишем первое соотношение (28) в виде

$$\tilde{p} = E_{о}\frac{\rho - \rho_{0}}{\rho_{0}} = \frac{E_{о}}{\rho_{0}}(\rho - \rho_{0}) \ . \tag{31}$$

Согласно [7, стр. 128; 9, стр. 47] скорость звука в деформируемой среде $a = \sqrt{\partial\tilde{p}/\partial\rho}$. Поэтому величину $a = \sqrt{E_{о}/\rho_{о}}$ с достаточной точностью можно полагать равной скорости звука, поскольку после дифференцирования (31) вытекает именно этот результат. В таком случае

$$E_{о} = -\frac{\tilde{p}}{\varepsilon_{о}} = -a^{2}\frac{\rho - \rho_{0}}{\varepsilon_{о}}. \tag{32}$$

С учетом (32) выражение для объемной вязкости $\overline{\mu}_{о}$ принимает вид

$$\overline{\mu}_{о} = \frac{\sigma_{ср} + a^{2}(\rho - \rho_{0})}{\dot{\varepsilon}_{о}} \ . \tag{33}$$

Таким образом, уравнения динамики упруго сжимаемой жидкости, согласно модели Фойхта, с нулевыми упругими касательными напряжениями при постоянных $\overline{\mu}$ и $\overline{\mu}_{о}$ окончательно принимают вид

$$\rho\vec{F} - \mathrm{grad}(a^{2}(\rho - \rho_{0}) + (\overline{\mu}_{о} + \frac{\mu}{3})\mathrm{div}\dot{\vec{u}}) + \mu\nabla^{2}\dot{\vec{u}} = \rho\ddot{\vec{u}} \tag{34}$$

и вместе с уравнением неразрывности образуют замкнутую систему. При этом для определения коэффициента $\overline{\mu}_{о}$ (аналога объемной вязкости) согласно (33) требуются данные о величинах a, ρ, ρ_{0}. В таком виде эти уравнения фактически вытекают из приведенных в [5, стр. 73], если второму коэффициенту вязкости ζ в [5] придать смысл объемной вязкости $\overline{\mu}_{о}$, чего авторы [5], по-видимому, не знали. В противном случае они бы не допустили некорректный переход к уравнениям для несжимаемой жидкости, опуская член $\zeta \operatorname{div}\dot{\vec{u}}$, поскольку при $\operatorname{div}\dot{\vec{u}} = 0$ объемная вязкость $\zeta = \infty$.

Если рассматривается слабосжимаемая жидкость, т.е. $\rho \approx \rho_0$ и кроме того $\operatorname{grad}(\rho - \rho_0)$ - малая величина по сравнению с другими членами уравнений (34), то первый член в скобках и уравнение неразрывности можно опустить и по сути дела перейти к (15,б), т.е. к уравнениям идеально вязкой сжимаемой жидкости.

Из (25) вытекает, что сумму коэффициентов $\lambda + \frac{2}{3}\mu$ в (1) действительно можно толковать как объемную вязкость $\bar{\mu}_o$ для упруго сжимаемой жидкости. Однако следует учесть, что, принимая $\bar{\mu}_o = 0$ и оставляя в силе определяющее соотношение (4), мы осуществляем неизбежный переход к традиционной идеальной жидкости, поскольку согласно последнего соотношения (22) должны также принять и условие $\mu = 0$.

Если же мы откажемся от (4), т.е. примем $\tilde{p} = 0$, то в этом случае получим уравнения идеально вязкой жидкости (15,в). Переход от (1) к идеально вязкой жидкости можно также осуществить, полагая $\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0$ и как следствие $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -3\tilde{p}$. Однако, при таком переходе, который, кстати, выполнил автор [4, стр. 384], сумме $\lambda + \frac{2}{3}\mu$ нельзя придавать смысл объемной вязкости $\bar{\mu}_o$, поскольку в этом случае $\bar{\mu}_o$ определяется по формуле (16).

Такого рода переход означает, что в соотношениях (18) и $\tilde{p}$, и $\bar{\sigma}_{ii}$ следует полагать вязкими составляющими. Поэтому имеются две объемные вязкости $\tilde{\mu}_o$ и $\bar{\mu}_o$, т. е. для каждой составляющей. Когда одна из этих вязкостей, в данном случае $\bar{\mu}_o$ предполагается равной нулю, среда превращается в обычную вязкую жидкость, у которой $\tilde{\mu}_o \neq 0$.

6. Недоразумения по поводу отрицательной «второй вязкости»

В классических трудах [1, 5] достаточно аргументировано доказано, что и «первая», и «вторая» вязкости сжимаемой жидкости являются положительными величинами. Однако, в некоторых авторитетных работах [11 и др.] рассматриваются различные процессы с отрицательной «второй вязкостью». По поводу этого недоразумения следует заметить, что оно, возможно, вызвано различным смыслом, который вкладывают те или иные авторы в понятие «вторая вязкость». Если под «второй вязкостью» понимать именно объемную вязкость согласно (26) или (22), то, вполне очевидно, что ее величина может быть только положительной и для идеально вязкой, и для упруго сжимаемой жидкости. Но в тех случаях, когда под «второй вязкостью» понимается коэффициент λ (см., например, [3, стр. 45]), то для идеально вязкой жидкости всегда соблюдается условие $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$, и поэтому понятие «вторая вязкость» теряет смысл. Однако, для упруго сжимаемой жидкости коэффициент λ определятся по формуле

$$\lambda = \mu_o - \frac{2}{3}\mu = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}, \tag{34}$$

откуда следует, что λ<0 только при коэффициентах Пуассона $\nu < 0$.

ПРОДОЛЖЕНИЕ СЛЕДУЕТ

Список литературы

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды, т.1. Учебник. – М: Наука, 1970.-492 с.
2. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды.- М: Изд-во Моск. ун-та, 1971.- 278с.
3. Гузь А.Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости. – К.: А.С.К. 1998.- 350 с.
4. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, ч.2.- М: ГИФМЛ, 1963.-728с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т.6. Гидродинамика.-М.: Наука. 1988.-736 с.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Перев с нем. – М: Наука , 1969. – 744с.
7. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Учебное пособие.- М.: Наука, 1970. – 904 с.
8. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. Учебник. – М.: Высшая школа, 1968.-512с.
9. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости.- М.: ИЛ, 1961,- 588с.
10. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. Учебное пособие.- М.: Наука, 1975,- 408 с.
11. Молевич Н.Е. Отрицательная вторая вязкость в динамике неравновесных газовых сред. Дисс. на соиск. уч. степ. д.ф.м.-н. М.: МИФИ. 2002.
12. Биркгоф Г. Гидродинамика. Перев. с англ.-М: ИЛ,1963.-244с.